Ministère de l'enseignement supérieur et la recherche scientifique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR UNIVERSITY
ANNABA

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Année : 2016/2017

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire de mathématiques appliquées

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en MATHÉMATIQUES
Option
Systèmes dynamiques

Cycles limites des systèmes différentiels ordinaires

Présenter Par:
Mellahi Nawal

DIRECTEUR DE THÈSE : Makhlouf Ammar Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury :

PRESIDENT	: Ghanem Radouane	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR	: Ferchichi Mohamed Rédha	M.C.A	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR	: Badi Sabrina	M.C.A	U.8 Mai. GUELMA
EXAMINATEUR	: Hadidi Elbahi	M.C.A	U.B.M. ANNABA

Remerciements

Je tiens à remercier ALLAH qui m'a donné la force pour accomplir ce travail.

J'exprime également mes remerciements et ma gratitude à mes encadreurs :
Dr *Boulfoul Amel* et Pr *Amar Makhlouf*
sans qui je ne serais pas là où je suis aujourd'hui, pour leurs encouragements, leurs orientations et ont été présents à chaque instant au cours de mon parcours de recherche, pour leur sérieux et leur dévouement.

Je tiens à remercier monsieur Ghanem Radouane, Professeur à l'université de Badji Mokhtar-Annaba, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.
Mes remerciements vont également à monsieur Ferchichi Mohamed Rédha, Maître de conférences A à l'université Badji Mokhtar-Annaba, madame Badi Sabrina Maître de conférences A à l'université 8 Mai Guelma et monsieur Hadidi Elbahi, Maître de conférences A à l'université Badji Mokhtar-Annaba pour le temps précieux qu'ils ont accordé à mon travail pour l'examiner et de le juger.

Enfin, je tiens à remercier mes parents pour leur sacrifice, leur encouragement, leur présence et leur soutiens.

Résumé

Cette thèse s'intéresse à l'étude du nombre maximal de cycles limites des systèmes différentiels ordinaires dépendant d'un petit paramètre. Plus particulièrement, on étudie deux classes de systèmes différentiels en utilisant la théorie de moyennisation.

La première classe concerne l'étude des systèmes différentiels polynômiaux de Liénard généralisés de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - l(x)y^3, \end{cases}$$

où $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$, $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$, $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$ et $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x)$. Pour chaque $k = 1, 2$, $f_k(x)$, $g_k(x)$, $h_k(x)$ et $l_k(x)$ sont de degrés n. ε est un paramètre réel supposé petit.

la deuxième classe concerne l'étude des systèmes différentiels de Kukles généralisés de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + l(x), \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0 y^3, \end{cases}$$

où $l(x) = \varepsilon l^1(x) + \varepsilon^2 l^2(x)$, $f(x) = \varepsilon f^1(x) + \varepsilon^2 f^2(x)$, $g(x) = \varepsilon g^1(x) + \varepsilon^2 g^2(x)$, $h(x) = \varepsilon h^1(x) + \varepsilon^2 h^2(x)$ et $d_0 = \varepsilon d_0^1 + \varepsilon^2 d_0^2$. Pour chaque $k = 1, 2$, $l^k(x)$, $f^k(x)$, $g^k(x)$ et $h^k(x)$ sont de degrés m, n_1, n_2 et n_3 respectivement. $d_0^k \neq 0$ est un nombre réel et ε est un petit paramètre.

L'étude des deux classes est illustrée par des exemples.

Mots clés : Cycle limite, théorie de moyennisation, système de Liénard, système de Kukles.

Abstract

This thesis is interested to the study of the maximum number of limit cycles of ordinary differential systems depending of a small parameter. Using the averaging theory of first and second order, we study two classes of differential systems.

The first class deals with generalized polynomial Liénard differential system of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - l(x)y^3, \end{cases}$$

where $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$, $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$, $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$ and $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x)$ where $f_k(x)$, $g_k(x)$, $h_k(x)$ and $l_k(x)$ have degree n for each $k = 1$, 2, and ε is a small parameter.

The second class studied the generalized polynomial Kukles differential system of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + l(x), \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0 y^3, \end{cases}$$

where $l(x) = \varepsilon l^1(x) + \varepsilon^2 l^2(x)$, $f(x) = \varepsilon f^1(x) + \varepsilon^2 f^2(x)$, $g(x) = \varepsilon g^1(x) + \varepsilon^2 g^2(x)$, $h(x) = \varepsilon h^1(x) + \varepsilon^2 h^2(x)$ and $d_0 = \varepsilon d_0^1 + \varepsilon^2 d_0^2$ where $l^k(x)$, $f^k(x)$, $g^k(x)$ and $h^k(x)$ have degree m, n_1, n_2 and n_3 respectively, $d_0^k \neq 0$ is a real number for each $k = 1, 2$, and ε is a small parameter.

This study is illustrated by applications.

Keywords : Limit cycle, Averaging theory, Liénard systems, Kukles systems.

ملخــــص

تتناول هذه الأطروحة دراسة العدد الأكبر للدورات الحدودية الخاصة بالجمل التفاضلية المتعلقة بوسيط صغير. باستعمال نظرية المتوسط من الدرجة الأولى والثانية نقوم بدراسة نوعين من الجمل التفاضلية.

القسم الأول هو عبارة عن جمل من المعادلات التفاضلية كثيرات الحدود لليينارد المعممة من الشكل:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - l(x)y^3, \end{cases}$$

حيث $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$, $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$, $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$ و $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x)$, ε وسيط صغير. من اجل $k=1, 2$ و $f_k(x)$, $g_k(x)$, $h_k(x)$ و $l_k(x)$ كثيرات حدود من الدرجة n.

القسم الثاني هو عبارة عن جمل من المعادلات التفاضلية كثيرات الحدود لكيكلاس المعممة من الشكل:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + l(x), \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0 y^3, \end{cases}$$

حيث $l(x) = \varepsilon l^1(x) + \varepsilon^2 l^2(x)$, $f(x) = \varepsilon f^1(x) + \varepsilon^2 f^2(x)$, $g(x) = \varepsilon g^1(x) + \varepsilon^2 g^2(x)$ $h(x) = \varepsilon h^1(x) + \varepsilon^2 h^2(x)$ و $d_0 = d_0^1 + d_0^2$, ε وسيط صغير. من اجل $k=1,2$, $l^k(x)$, $f^k(x)$, $g^k(x)$ و $h^k(x)$ كثيرات حدود من الدرجة m, n_1, n_2 و n_3 بالترتيب. $d_0^k \neq 0$ عدد صحيح.

دراسة القسمين السابقين من الجمل التفاضلية تم توضيحهما بواسطة أمثلة.

كلمات مفتاحيه: دورة حدودية, نظرية المتوسط, معادلات ليينارد, معادلات كيكلاس.

Table des matières

Introduction générale

Un système dynamique est un système physique qui évolue. Il peut évoluer dans le temps ou par rapport à une autre variable suivant l'espace de phases considéré. La trajectoire d'un objet en mouvement dans le temps est donc un système dynamique, ainsi que le nombre d'individu d'une population quelconque dans le temps, ou encore les valeurs d'une fonction (par exemple : $y = 2x$) par rapport à la valeur de x. Il est possible de suivre l'évolution de l'état d'un système physique dans le temps. Pour cela, on construit d'abord un modèle avec les lois physiques et les paramètres nécessaires et suffisantes pour caractériser le système. Ce modèle est bien souvent constitué par des équations différentielles.

Les équations différentielles sont apparues la première fois vers la fin du 17ème siècle dans les travaux de Isaac Newton, Leibniz et Bernoulli. Elles se sont produites comme conséquence normale des efforts de ces grands savants d'appliquer les nouvelles idées du calcul à certains problèmes en mécanique. Plus tard la théorie d'intégration des équations différentielles a été développée par des analystes et des mécaniciens comme Lagrange, Poisson, Hamilton et Liouville aux 18ème siècle et 19ème siècles. Pendant plus de 300 ans, les équations différentielles ont servi l'outil essentiel pour d'écrire et analyser des problèmes dans beaucoup de disciplines scientifiques (Mécanique, Géométrie, Physique,$\cdots$). L'importance de cette notion a motivé des générations de mathématiciens et d'autres scientifiques pour développer des méthodes pour étudier les propriétés de leurs solutions. Par exemple, pour la mécanique non linéaire, on considère qu'elle fut fondée à la fin du 19ème siècle par le mathématicien français Poincaré (Sur les courbes définies par des équations différentielles, 1881-1886 ; Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1892-1899). Il y a lieu de citer aussi le mathématicien russe Lyapunov, fondateur de la théorie de la stabilité (Le problème général de la stabilité du mouvement, 1892).

Dans les années 1920, le statisticien Lotka et le mathématicien Volterra élaborent un modèle qui décrit la dynamique de systèmes écologiques où cohabitent un prédateur et sa proie. De façon emblématique, il est souvent appliqué aux lynx et aux lièvres des neiges dont les recensements précis ont été établis par la compagnie de la baie d'Hudson au 19ème siècle. Ce modèle est constitué d'une équation différentielle qui traduit l'évolution des populations de chaque animal. Ainsi, quand les lynx sont nombreux, la population de lièvres décroît, ce qui entraîne la diminution du nombre de lynx, puis l'augmentation de celui de lièvres, libérés de la pression des prédateurs.... Ce type d'équations n'est pas réservé à la biologie et il est également pertinent notamment en physique : au début du 20ème siècle, Van der Pol décrit de cette façon les oscillations d'un circuit électrique doté d'une lampe dont la résistance dépend de l'intensité du courant qui y passe.

Dans les deux exemples, à mesure que le temps croît, le comportement du système a tendance à devenir périodique. Graphiquement, les courbes qui représentent les solutions s'approchent d'un cycle : on parle de "cycle limite".

L'acte de naissance des cycles limites est le Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle écrit par Poincaré en 1881 [42]. Un cycle limite est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques d'une équation différentielle. Rigoureusement, le modèle de Volterra n'admet un cycle limite que dans une version modifiée par l'écologiste canadien Holling, mais nous n'entrerons pas dans les détails. D'autres systèmes, plus complexes, peuvent avoir plusieurs cycles limites. Le comportement asymptotique sera encore périodique, mais la convergence aura lieu vers tel ou tel cycle limite selon la position initiale. Il est important de pouvoir déterminer le nombre de ces cycles limites.

Cette question est au cœur de la deuxième partie du 16ème problème de Hilbert [21] qui a été posé par David Hilbert au Paris conférence "congrès international des mathématiciens en 1900", en même temps que les autres 22 problèmes. On peut la formulée de la façon suivante : Quel est le nombre maximal des cycles limites qui peut avoir un système de degré n dans le plan ?

$$\begin{cases} \dot{x} &= P_n(x,y), \\ \dot{y} &= Q_n(x,y). \end{cases}$$

Le problème des cycles limites n'est toujours pas résolu 112 ans après son énoncé ! Dulac (1923) [13] proposa une démonstration assurant que $H(n)$ est fini pour tout n. Mais cette démonstration comportait une erreur. La résolution du Dulac a été faite d'une façon indépendante par Ecalle, Martinet et Moussu en 1987, Ilyashenko en 1991 et par Ecalle en 1992. Cette résolution permet de montrer que $H(n) < \infty$. Petrovsky et Landis (1957) crurent trouver la valeur de $H(2)$ mais ils s'aperçurent d'une erreur dans leur propre démonstration Landis et Petrovski, 1967) avant que celui-ci ne soit infirmée par un contre exemple de Shi (1982) dans lequel un système quadratique a 4 cycles limites. Ainsi, si $H(n)$ est un nombre fini pour tout n la seule chose que l'on sache est que $H(2) \geq 4$ et $H(3) \geq 11$ (Jibin et Chunfu, 1985 ; Zoladek, 1995). Christopher et lloyd (1995) ont donné une borne inférieur au nombre $H(n)$: $H(n) \geq 2log(n)$.

Les chercheurs considèrent deux classes spéciales des équations différentielles : des systèmes de Liénard généralisés et des systèmes de Kukles généralisés.

Système de Liénard polynomial s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -g(x) - f(x)y, \end{cases} \quad (1)$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont deux polynômes de degré n et m respectivement. Ce système est très intéressant pour étudier les cycles limites des systèmes planaires, nous

avons une version simplifiée du problème de Hilbert dans [49] (1998). En 1977, Lins et al. [28] a déclaré la conjecture que si $f(x)$ est de degré $n \geq 1$ alors le système (1) a au plus $[\frac{n}{2}]$ cycles limites. Ils ont prouvé cette conjecture pour $n = 1, 2$. La conjecture pour $n = 3$ a été prouvé par Li Chengzi et Llibre dans [25] (2012). Pour $n \geq 5$ la conjecture est pas vrai, voir De Maesschalck et Dumortier [12] (2011) et Dumortier et al. [16] (2007). Donc, il reste à savoir si la conjecture est vraie ou non pour $n = 4$.

Il y a beaucoup de résultats concernant l'existence de cycles limites de faible amplitude pour (1), voir [36] (1988). On note $H(m, n)$ le nombre maximal de cycles limites qui peuvent exister simultanément pour le système (1). L'histoire commence avec Liénard (1928), un ingénieur français qui établit un théorème d'existence et d'unicité d'une solution périodique pour le système portant son nom (pour une revue complète des résultats antérieurs aux années soixante-dix, voir le livre de Sansone et Conti [48] (1964)).

- En 1928, Liénard [27] montra que si $m = 1$ et si $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ est une fonction continue et impaire qui a une unique racine positive en $x = a$ et qui est strictement croissante pour $x \geq a$, alors le système (1) possède un unique cycle limite.
- En 1975, Rychkov [45] a prouvé que pour des polynômes $F(x)$ impairs et de degré 5 et si $m = 1$, alors (1) n'a au plus que 2 cycles limites.
- En 1977, Lins, De Melo et Pugh [28] ont prouvé que si $m = 3$ et $n = 1$, alors il n'y a au plus qu'un cycle limite. Ils ont de plus donné les conditions pour que ce cycle existe. Enfin ils ont conjecturé que si $g(x) = x$, il ne pouvait y avoir plus de $E(\frac{m-1}{2})$ cycles limites.
- En 1983, Xianwu [53] a prouvé la conjecture pour certains cas où $m = 4$ et $n = 1$.
- Dumortier et al. dans [17] et [14] ont prouvé que $H(3, 1) = 1$.
- En 1997, Dumortier et Li [15] ont prouvé que $H(2, 2) = 1$.
- En 1998, Coppel [11] a prouvé que $H(2, 1) = 1$.

Notons par $\hat{H}(m, n)$ le nombre maximum de cycles limites de faible amplitude du système (1).
Blows, Lloyd [2] et Lynch ([37], [38]) ont donné les résultats suivants :

- Si g est impair, alors $\hat{H}(m, n) = [n/2]$.
- Si f est pair, alors $\hat{H}(m, n) = n$, quelque soit g.
- Si f est impair, alors $\hat{H}(m, 2n + 1) = [(m - 2)/2] + n$.
- Si $g(x) = x + g_e(x)$, où g_e est pair, alors $\hat{H}(2m, 2) = m$.

En 1998, Gasull et Torregrosa [19] ont trouvé des bornes supérieurs pour $\hat{H}(7, 6)$, $\hat{H}(6, 7)$ et $\hat{H}(7, 7)$. En 1999, Lynch et Cristopher [10] ont développé une nouvelle méthode algébrique qui permet de déterminer la constante de Liapunov du système (1). Ils ont donné les résultats suivants :

- $\hat{H}(m, 2) = [(2m + 1)/3]$.
- $\hat{H}(2, n) = [(2n + 1)/3]$.

- $\hat{H}(m,3) = 2[(3m+2)/8]$ pour tout $1 < m \leq 50$.
- $\hat{H}(3,n) = 2[(3n+2)/8]$ pour tout $1 < n \leq 50$.
- $\hat{H}(4,k) = \hat{H}(k,4)$ pour $k = 6,7,8,9$ et $\hat{H}(5,6) = \hat{H}(6,5)$.

En 2006, Yu et Han [54] ont obtenu des valeurs précises de $\hat{H}(m,n) = \hat{H}(n,m)$ pour $n = 4$, $m = 10,11,12,13$, $n = 5$, $m = 6,7,8,9$ et $n = 6$, $m = 5,6$.
En utilisant des techniques différentes (intégrales abéliennes, méthodes de la moyennisation, la méthode de Melnikov,...) on a les bornes inférieurs suivantes des nombres de Hilbert. On a $H(2) \geq 4$ ([7], [50], [56]), $H(3) \geq 13$ [24], $H(4) \geq 22$ [8], $H(6) \geq 35$ [52], $H(n) \geq kn^2 lnn$ [9] et $H(n) \geq 4(n+1)^2 \left(1.442695ln(n+1) - \frac{1}{6}\right) + n - \frac{2}{3}$ [26].

En 2010, Llibre et al. [31] ont calculé le nombre maximal de cycles limites $\tilde{H}_k(m,n)$ des systèmes de Liénard (1), en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre k pour $k = 1,2,3$.
En 2012, Llibre et Valls [34] ont étudié par la méthode de moyennisation du premier et du deuxième ordre les systèmes suivants :

$$\dot{x} = y - g_1(x) - f_1(x)y, \;\; \dot{y} = -x - g_2(x) - f_2(x)y,$$

où $g_1(x), f_1(x), g_2(x)$ et $f_2(x)$ sont de degrés k, l, m et n, respectivement.
En 2013, Llibre et Valls ont étudié par la méthode de moyennisation du troisième ordre les systèmes suivants (voir [32] et [33], respectivement) :

$$\begin{aligned} \dot{x} = y - g_1(x), \;\; \dot{y} = -x - g_2(x) - f_2(x)y, \\ \dot{x} = y - f_1(x)y, \;\; \dot{y} = -x - g_2(x) - f_2(x)y, \end{aligned}$$

où $g_1(x), f_1(x), g_2(x)$ et $f_2(x)$ sont de degrés k, l, m and n, respectivement.

Système de Kukles polynomial s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + l(x), \\ \dot{y} &= Q(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

où $Q(x,y)$ et $l(x)$ sont des polynômes avec des coefficients réels. Lorsque $l(x) = 0$ et $Q(x,y)$ est un polynôme de degré 3, le système (2) coïncident avec le système classique de Kukles :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x + a_0y + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3. \end{cases} \tag{3}$$

Ce système a été introduit par Kukles dans [23] (1944) qui a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (3) dispose d'un centre à l'origine. Ce système cubique sans le terme y^3 est appelé système de Kukles réduit. Sadovskií [46] (2003) a résolu le problème du centre-foyer de ce système avec la condition $a_2a_7 \neq 0$ et a prouvé qu'il peut avoir 7 cycles limites. Rousseau et al. [44] (1997) apparaît une description des bifurcations locales des périodes critiques au voisinage

d'un centre non dégénéré des systèmes de Kukles réduits. Zang et al. [55] (2008) ont étudié le nombre et la distribution des cycles limites pour une classe des systèmes de Kukles réduits sous perturbation cubique. Chavarriga et al. [6] (2004) ont étudié le nombre maximal de cycles limites de faible amplitude qui peut coexister avec des courbes algébriques invariantes dans un système de Kukles.

Plan de la thèse :
Cette thèse se compose de quatre chapitres et une annexe.

✓ **Chapitre 1 :** le premier chapitre est un rappel de quelques notions générales que nous avons utilisé dans ce travail. Nous commençons par définir les systèmes dynamiques, les points d'équilibre et leur nature, la linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre. Ensuite nous introduisons la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire.

✓ **Chapitre 2 :** dans ce chapitre, nous présentons des théorèmes importants de la méthode de moyennisation avec des exemples. On applique ces théorèmes pour la recherche des cycles limites des deux problèmes étudiés dans les chapitres trois et quatre.

✓ **Chapitre 3 :** ce chapitre concerne l'étude du nombre maximal des cycles limites qui bifurquent d'un centre linéaire perturbé par une classe généralisée de systèmes différentiels de Liénard de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - l(x)y^3, \end{cases}$$

où $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ et $l(x)$ sont des polynômes de degrés n. En utilisons la méthode de moyennisation du premier et deuxième ordre.
Le résultat de ce chapitre est soumis pour publication dans le journal "Differential Equations and Dynamical Systems".

✓ **Chapitre 4 :** dans le dernier chapitre, nous donnons le nombre maximal de cycles limites de certains systèmes de Kukles généralisés de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + l(x), \\ \dot{y} &= x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases}$$

où $l(x)$, $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ sont des polynômes de degrés m, n_1, n_2 et n_3 respectivement. $d_0 \neq 0$ est un nombre réel. En utilisons la méthode de moyennisation du premier et deuxième ordre.
Le résultat de ce chapitre a été publié dans le journal "Differential Equations and Dynamical Systems".
Mellahi N, Boulfoul A and Makhlouf A. *Maximum Number of Limit Cycles for Generalized Kukles Polynomial Differential Systems.* Differential Equations and Dynamical Systems. pp. 1-22, (2016).

Chapitre 1

Notions préliminaires

Sommaire

Ce chapitre contient quelques notions générales et principales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires.

1.1 Systèmes dynamiques

Définition 1 *Un système dynamique sur* $\mathbb{R}^n$ *est une application* $U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *telle que*

1. $U(.,x) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est continue.*
2. $U(t,.) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est continue.*
3. $U(0,x) = x$.
4. $U(t+s,x) = U(t,U(s,x))$ *pour* t, $s \in \mathbb{R}^+$ *et* $x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1.1 *Soit le système*

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

où A *est une matrice constante,* $t \in \mathbb{R}^+$ *et* $x \in \mathbb{R}^n$*. La solution de* (1.1) *est donnée par*

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Le système (1.1) *engendre un système dynamique*

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
$$U(t,x) = e^{At}x_0.$$

1.2 Flot d'une équation différentielle

Définition 2 *Soit le système non linéaire*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.2}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $x_0 \in E$, E *est un sous ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f \in C^1(E)$. *Soit* $\varphi(t, x_0)$ *la solution de* (1.2). *L'ensemble des applications* φ_t *définies par*

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$$

est appelé le flot de l'équation différentielle (1.2).

Remarque 1.2.1 *Le flot est dit autonome si* f *ne dépend pas explicitement du temps* t*, sinon il est dit non autonome.*

1.3 Points d'équilibre et linéarisation

1.3.1 Points d'équilibre

Définition 3 *Le point* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *est appelé un point critique ou point d'équilibre du système* (1.2) *s'il vérifie*

$$f(x_0) = 0.$$

1.3.2 Linéarisation des systèmes

Définition 4 *Considérons le système* (1.2). *Le système*

$$\dot{x} = Ax \text{ où } A = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \geq n} \tag{1.3}$$

est appelé Linéarisation de (1.2) *en* x_0.

Remarque 1.3.1 *La linéarisation d'un système différentiel nous amène à l'étude de la nature des points critiques.*

Définition 5 *Le point critique* x_0 *est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne* $Df(x_0)$ *n'a de partie réelle nulle.*

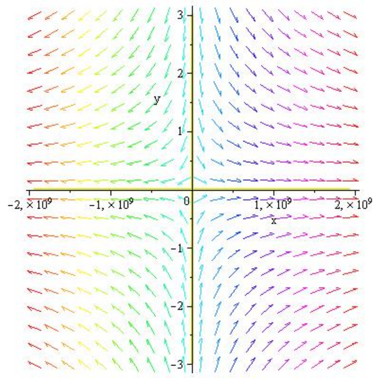


Figure 1.1 – (0,0) est un point selle

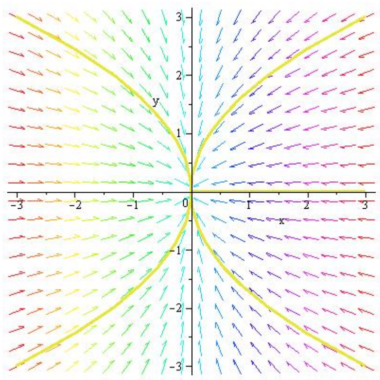


Figure 1.2 – (0,0) est un noeud stable

1.3.3 Nature des points d'équilibre

Soit le système différentiel linéaire (1.3) où A est une matrice 2×2 et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon ces valeurs propres :

1. Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent, alors le point critique $x = 0$ est un point selle, il est toujours instable (voir FIGURE 1.1)
2. Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe, on a trois cas :
   (a) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique $x = 0$ est un nœud stable (voir FIGURE 1.2).
   (b) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point critique $x = 0$ est un nœud instable (voir FIGURE 1.3).
   (c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, le point critique $x = 0$ est un nœud propre, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$ (voir FIGURE 1.4 et 1.5).
3. Si λ_1 et λ_2 sont des complexes conjuguées et $Im(\lambda_{1,2}) \neq 0$, alors le point critique $x = 0$ est un foyer. Il est stable si $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ et instable si $Re(\lambda_{1,2}) > 0$ (voir FIGURE 1.6 et 1.7).

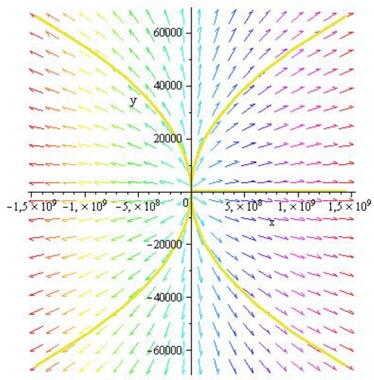


FIGURE 1.3 – (0,0) est un noeud instable

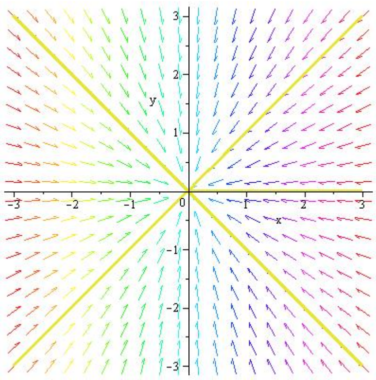


FIGURE 1.4 – (0,0) est un noeud propre stable

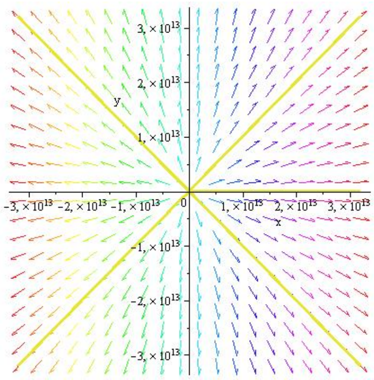


FIGURE 1.5 – (0,0) est un noeud propre instable

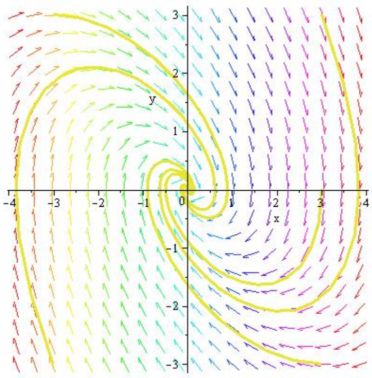


FIGURE 1.6 – (0,0) est un foyer stable

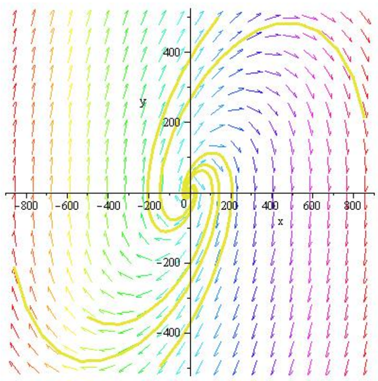


FIGURE 1.7 – (0,0) est un foyer instable

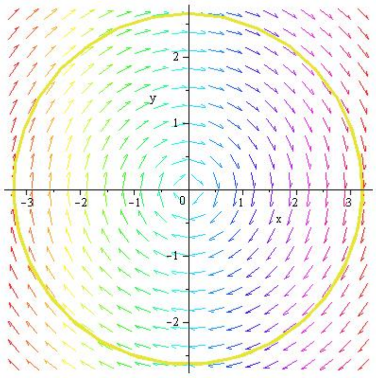


FIGURE 1.8 – (0,0) est un centre

4. Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, alors le point critique $x = 0$ est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable (voir FIGURE 1.8).

1.3.4 Stabilité du point d'équilibre

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre nous amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ce point d'équilibre.

Définition 6 *Soit le système*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Supposons que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution et soit $\Phi(t)$ la solution du système (1.4). *On dit qu'un point d'équilibre p est stable si $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tel que si*

$$\|\Phi(t_0) - p\| < \delta \Longrightarrow \|\Phi(t) - p\| < \delta, \forall t \geq t_0.$$

S'il existe de plus un voisinage de p tel que pour tout x dans ce voisinage $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t) = p$ alors le point d'équilibre p est dit asymptotiquement stable.

Théorème 1.3.1 *Soit x_0 un point d'équilibre pour le système* (1.2)

(*i*) *Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives, alors le point d'équilibre x_0 est asymptotiquement stable.*

(*ii*) *S'il existe au moins une valeur propre de $Df(x_0)$ avec une partie réelle positive, alors le point d'équilibre x_0 est instable.*

(*iii*) *Si $Df(x_0)$ a des valeurs propres avec des parties réelles négatives et d'autres avec des parties réelles nulles, alors on ne peut rien dire sur la stabilité du point d'équilibre x_0.*

1.4 Plan et portrait de phase

Pour un système dont l'évolution au cours du temps t est décrite par la fonction à valeurs réelles $x(t)$, on appelle trajectoire de phase une représentation géométrique cartésienne dans laquelle on reporte les positions au cours du temps t d'un point représentatif M d'abscisse x et d'ordonnée $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.
Cette terminologie est en accord avec celle de la physique statique : le plan $(x, \dot{x})$ ou le plan de phase s'identifie (avec $p_x = m\dot{x}$) à l'espace de phase (x, p_x) du problème, de telle sorte que la représentation au cours du temps du point M est bien la trajectoire du système dans son espace de phase.
Une trajectoire de phase donnée est décrite à partir d'un point $M_0(x_0, \dot{x}_0)$ représentatif des conditions initiales de l'évolution considérée. L'ensemble des trajectoires de phase décrites par le système à partir de toutes les conditions initiales réalisables est le portrait de phase de celui-ci.

Définition 7 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \tag{1.5}$$

où P et Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d.
Le portrait de phase est l'ensemble des orbites qui représentent les solutions du système (1.5) *dans l'espace des phases ainsi que ces points critiques qui sont considérés comme des solutions constantes. Le plan (xoy) est appelé plan de phase.*

1.5 Orbites périodiques et cycles limites

1.5.1 Orbite périodique

Définition 8 *On appelle orbite périodique toute trajectoire $\Phi_t(x)$ de* (1.5) *telle qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant*

$$\Phi(t + T, x) = \Phi(t, x). \tag{1.6}$$

Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie (1.6) *est appelé période.*

1.5.2 Cycle limite

Définition 9 *Un cycle limite du système* (1.5) *est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques de ce système.*

Définition 10 *L'amplitude du cycle limite est la valeur maximale de la variable x de ce cycle limite.*

Exemple 1.5.1 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2), \end{cases} \tag{1.7}$$

tel que α *est un paramètre. En coordonnées polaires* $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$, *le système* (1.7) *devient*

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1-r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Posons

$$f(r) = \dot{r} = \alpha r(1-r^2).$$

Alors

$$f(r) = 0 \Longrightarrow r = 0 \ \text{ ou } \ r = 1.$$

On a donc un point d'équilibre (0, 0) et un cycle limite d'amplitude r = 1

$$(x(t), y(t)) = (\cos(t+\theta_0), \sin(t+\theta_0)),$$

où

$$x^2 + y^2 = 1.$$

1. *Pour* $\alpha > 0$, *on a deux cas :*
   (a) *Si r < 1, alors f(r) > 0, d'où r(*$\nearrow$*).*
   (b) *Si r > 1, alors f(r) < 0, d'où r(*$\searrow$*).*

   Donc le cycle limite d'amplitude r = 1 est stable.
2. *Pour* $\alpha < 0$
   (a) *Si r < 1, alors f(r) < 0, d'où r(*$\searrow$*).*
   (b) *Si r > 1, alors f(r) > 0, d'où r(*$\nearrow$*).*

   Donc le cycle limite d'amplitude r = 1 est instable.
3. *Si* $\alpha = 0$, *le système a une infinité d'orbites périodiques, et il n'y a pas de cycle limite.*

Remarque 1.5.1 *Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.*

1.6 Existence et unicité des solutions des problèmes à valeurs initiales

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $t_0 < t < t_0 + T$, $x \in D$ et $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 11 *On dit que f satisfait la condition de Lipschitz par rapport à x si*

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|,$$

où $x_1, x_2 \in D$, *et L est une constante.*
Nous pouvons maintenant formuler un théorème bien connu d'existence et d'unicité pour des problèmes à valeur initiale.

Théorème 1.6.1 ***(existence et unicité)*** *On considère le problème à valeur initiale*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),\ x(t_0) = x_0,$$

où $x \subset D \in \mathbb{R}^n$, $t_0 < t \leq t_0 + T$. *On suppose que :*

a) f(t, x) est continue par rapport à t , x sur $G = [t_0, t_0 + T] \times D$.

b) f(t, x) satisfait la condition de Lipschitzienne en x.

Alors le problème à valeur initiale admet une solution unique.

CHAPITRE 2

Méthode de moyennisation

Sommaire

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la méthode de moyennisation qui est appliquée aux systèmes de la forme :

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \tag{2.1}$$

où $t \in I \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, ε un paramètre petit et f est T-périodique en t, l'équation moyennée associée à (2.1) s'écrit

$$\dot{x} = \varepsilon f^0(x), \tag{2.2}$$

où

$$f^0(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x, t, 0)dt. \tag{2.3}$$

La recherche des racines positives du (2.3) réduit le problème de la détermination des solutions T-périodique de (2.1) qui est en général un problème difficile.

La méthode de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes perturbatives utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Cette méthode a une longue histoire qui commence avec les travaux classiques de Lagrange et Laplace en 1788 qui ont donné une justification intuitive de la méthode. La première formalisation de cette théorie a été faite par Fatou en 1928. Elle a été introduite par Krylov et Bogoliubov en 1937 [22] et Bogoliubov et Mitropolskii [3] (1961). Elle a été ensuite développée par Verhulst [51] (1991), Marsden et McCracken [40] (1976), Sanders et Verhulst [47] (1985), Malkin [39] (1956) et Roseau [43] (1966), Llibre et Buica [4] (2004). D'autres formes et théorèmes de la méthode de moyennisation ont été démontrés ces dernières années et beaucoup d'articles ont été publiés concernant l'application de cette méthode

[5]. En utilisant la méthode de moyennisation, on réduit ce problème difficile des équations différentielles à la recherche des racines positives d'un système algébrique non linéaire.

Dans ce chapitre, on présente des différents théorèmes de la théorie de moyennisation.

2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre

Théorème 2.1.1 *On considère le système suivant :*

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t,x) + \varepsilon^2 R(t,x,\varepsilon), \tag{2.4}$$

où $F_1 : \mathbb{R} \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n, R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ *sont des fonctions continues, T-périodiques en la première variable et* D *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*. On définit* $F_{10} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *comme suit*

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T}\int_0^T F_1(s,z)ds, \tag{2.5}$$

supposons que

(i) F_1 *et* R *sont localement lipschitziennes par rapport à* x*.*

(ii) *Pour* $a \in D$ *tel que* $F_{10}(a) = 0$*, il existe un voisinage* V *de* a *tel que* $F_{10}(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in \bar{V}\backslash\{a\}$ *et* $d_B(F_{10}(a_\varepsilon), V, 0) \neq 0$*.*

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ *suffisamment petit, il existe une solution* $\varphi(.,\varepsilon)$ *du système* (2.4) *T-périodique isolée telle que* $\varphi(.,\varepsilon) \longrightarrow a$ *quand* $\varepsilon \longrightarrow 0$*.*

Les hypothèses de ce théorème sont plus faibles que celui dans le théorème 11.5 de Verhulst [51], où à la place de (i) il suppose que :

(j) $F_1, R, D_xF_1, D_x^2F_1$ et D_xR sont définies continues et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0,+\infty[\times D$, $-\varepsilon_f < \varepsilon < \varepsilon_f$.
Á la place de (ii) il suppose que :

(jj) pour $a \in D$ avec $F_{10}(a) = 0$, on a $J_{F_{10}}(a) \neq 0$, où D_xF désigne la matrice jacobienne de F par rapport à x, D_x^2F la matrice hessienne de F et $J_f(a)$ désigne le déterminant de la jacobienne de f calculée en a.

2.1.1 Application

1. L'équation différentielle de Van Der Pol :

Soit l'équation de Van Der Pol

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}, \tag{2.6}$$

qui est équivalente au système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \tag{2.7}$$

En coordonnées polaires $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, le système perturbé (2.7), s'écrit sous la forme

$$\dot{r} = \varepsilon r \sin^2\theta(1 - r^2\cos^2(\theta)), \tag{2.8}$$

$$\dot{\theta} = -1 + \varepsilon\cos\theta\sin\theta(1 - r^2\cos^2\theta). \tag{2.9}$$

D'ou

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r \sin^2\theta(1 - r^2\cos^2\theta)}{-1 + \varepsilon\cos\theta\sin\theta(1 - r^2\cos^2\theta)}. \tag{2.10}$$

On sait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2), \quad |x| < 1.$$

D'ou

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= -\varepsilon r \sin^2\theta(1 - r^2\cos^2\theta) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon F(\theta, r) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{2.11}$$

De (2.5) on obtient

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta, r)d\theta \\ &= \frac{r}{8}(r^2 - 4). \end{aligned}$$

Les cycles limite possibles pour l'équation (2.4) sont donnés par les racines positives de l'équation

$$F_{10}(r) = \frac{r}{8}(r^2 - 4) = 0. \tag{2.12}$$

Cette équation algébrique admet une seule solution positive $r^* = 2$. Alors l'équation de Ven Der Pol (2.6) a un cycle limite d'amplitude $r^* = 2$.

1. Pour $\varepsilon > 0$ ce cycle limite est stable car $\varepsilon\frac{d}{dr}F_{10}(r^*) < 0$ (voir FIGURE 2.1).
2. Pour $\varepsilon < 0$ ce cycle limite est instable car $\varepsilon\frac{d}{dr}F_{10}(r^*) > 0$ (voir FIGURE 2.2).

2. Système différentielle de Liénard

Soit le système de Liénard

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(a_1 x + ... + a_n x^n), \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \tag{2.13}$$

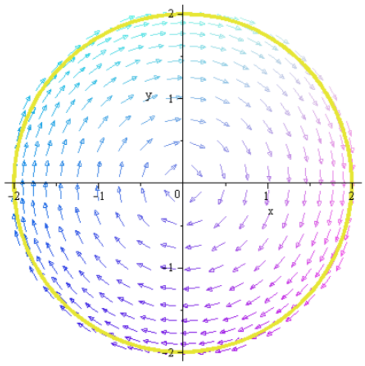


FIGURE 2.1 – Cycle limite stable du système (2.7) pour $\varepsilon = 0.01$.

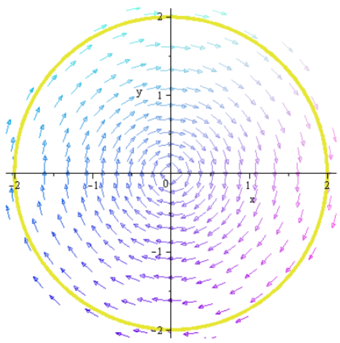


FIGURE 2.2 – Cycle limite instable du système (2.7) pour $\varepsilon = -0.01$.

Le système (2.13) s'écrit en coordonnées polaires

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \sum_{k=1}^{n} a_k r^k cos^{k+1}\theta, \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \sin\theta \sum_{k=1}^{n} a_k r^{k-1} cos^k\theta. \end{cases}$$

Ceci donne

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \sum_{k=1}^{n} a_k r^k cos^{k+1}\theta + O(\varepsilon^2).$$

On prend

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta, r)d\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} a_k r^k \int_0^{2\pi} cos^{k+1}\theta d\theta,$$

on aura

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} a_{2k+1} r^{2k+1} \int_0^{2\pi} cos^{2k+2}\theta d\theta.$$

Ce polynôme peut avoir au plus $[\frac{n-1}{2}]$ racines positives. Donc le système (2.13) peut avoir au plus $[\frac{n-1}{2}]$ cycles limites.

2.2 Méthode de moyennisation du deuxième ordre

Théorème 2.2.1 *On considère le système différentiel*

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \qquad (2.14)$$

où $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \longrightarrow R^n, R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ *sont des fonctions continues, T-périodiques en la première variable et* D *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*. On définit* $F_{10}, F_{20} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *par* (2.5) *et*

$$F_{20}(z) \quad = \quad \frac{1}{T}\int_0^T \left(D_x F_1(s, z)\int_0^s F_1(t, z)dt + F_2(s, z)\right) ds, \qquad (2.15)$$

supposons que

(i) *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $F_1 \in C^1$, F_1, F_2, R *et* $D_x F_1$ *sont localement lipschitziennes par rapport à* x*.* R *est différentiable par rapport à* ε*.*

(ii) *pour* $V \in D$*, un ensemble ouvert et borné et pour tout* $\varepsilon \in]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\ 0$*, il existe* $a_\varepsilon \in V$ *tel que* $F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) = 0$ *et* $d_B(F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon, V, 0) \neq 0$*.*

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ *suffisamment petit, il existe une solution T-périodique isolée* $\varphi(., \varepsilon)$ *de l'équation (2.14) telle que* $\varphi(0, \varepsilon) = a_\varepsilon$*.*

Les conditions (i) et (ii) de théorème 2.2.1 peuvent être remplacées par (j) et (jj) respectivement

(j) $F_1, R, D_xF_1, D_x^2F_1$ et D_xR sont définies continues et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0, +\infty[\times D$, $-\varepsilon_f < \varepsilon < \varepsilon_f$.

(jj) $F_{10}(z) = 0$, $\forall\, z \in D$ et pour $a \in D$ avec $F_{20}(a) = 0$, on a $J_{F_{20}}(a) \neq 0$.

2.2.1 Application

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(1 - x^2y) + \varepsilon^2(x - y^2x), \\ \dot{y} = -x + \varepsilon xy^2 + \varepsilon^2(1 - y^2x)y. \end{cases} \tag{2.16}$$

En écrivant le système (2.16) en coordonnées polaires (r, θ), on obtient

$$\begin{cases} \dot{r} = & \varepsilon(cos\theta + r^3\cos\theta\sin\theta - 2r^3\cos^3\theta\sin\theta) + \varepsilon^2(r + 2r^4\cos\theta - r^3\cos^2\theta \\ & -r^4\cos^5\theta) - r^4\cos\theta + r^3\cos^4\theta), \\ \dot{\theta} = & -1 + \varepsilon(-\frac{\sin\theta}{r} + 2r^2\cos^2\theta - r^2\cos^4\theta) + \varepsilon^2(-r^2\sin\theta\cos^3\theta - r^3\cos^2\theta\sin\theta \\ & +r^2\cos\theta\sin\theta + r^3\sin\theta\cos\theta), \end{cases}$$

d'où

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r) + \varepsilon^2 F_2(\theta, r) + O(\varepsilon^3),$$

où

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r) &= 2r^3\cos^3\theta\sin\theta - cos\theta - r^3\cos\theta\sin\theta, \\ F_2(\theta, r) &= r + 2r^4\cos\theta - r^3\cos^2\theta - r^4\cos^5\theta) - r^4\cos\theta + r^3\cos^4\theta \\ &\quad + \frac{\cos\theta}{r}(2r^3\cos^2\theta\sin\theta - 1 - r^3\sin\theta)(-\sin\theta + 2r^3\cos^2\theta - r^3\cos^4\theta), \\ F_3(\theta, r) &= O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

On applique le théorème 2.2.1, donc nous avons

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta(2r^3\cos^2\theta\sin\theta - 1 - r^3\sin\theta)d\theta \\ &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r) &= 6r^2\cos^3\theta\sin\theta - 3r^2\cos\theta\sin\theta, \\ \int_0^\theta F_1(s, r)ds &= -\frac{1}{2}r^3\cos^4\theta - \sin\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta). \end{aligned}$$

Donc la fonction $F_{20}(r)$ est

$$\begin{aligned} F_{20}(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r)\int_0^\theta F_1(s, r)ds + F_2(\theta, r)]d\theta \\ &= \frac{r}{8}(r^2 - 8). \end{aligned}$$

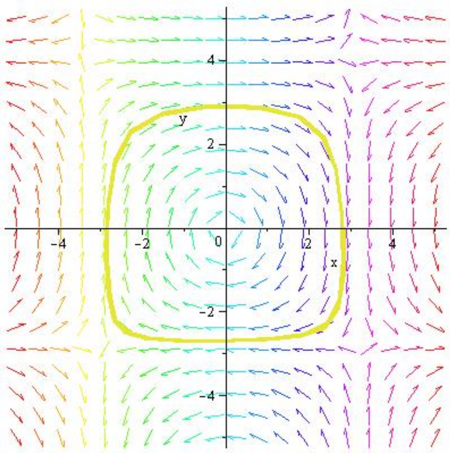


FIGURE 2.3 – Portrait de phase du système (2.16) pour $\varepsilon = 0.1$.

L'unique racine positive de $F_{20}(r) = 0$ est $r = 2\sqrt{2}$. Le système différentiel (2.16) a un cycle limite instable d'amplitude $r = 2\sqrt{2}$ car $\frac{d}{dr}F_{20}(2\sqrt{2}) = 2 > 0$ (voir FIGURE 2.3 et FIGURE 2.4).

2.3 Méthode de moyennisation du troisième ordre

Théorème 2.3.1 *On considère le système différentiel*

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t,x) + \varepsilon^2 F_2(t,x) + \varepsilon^3 F_3(t,x) + \varepsilon^4 R(t,x,\varepsilon), \tag{2.17}$$

où $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R} \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n, R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ *sont des fonctions continues, T-périodiques en la première variable et* D *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*.On définit* $F_{10}, F_{20}, F_{30} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *donnée par*

$$\begin{aligned}
F_{10}(z) &= \frac{1}{T}\int_0^T F_1(s,z)ds, \\
F_{20}(z) &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(D_x F_1(s,z) \int_0^s F_1(t,z)dt + F_2(s,z) \right) ds, \\
F_{30}(z) &= \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1}{2} D_z^2 F1(s,z) \left(y_1(s,z)\right)^2 + D_z F_1(s,z) y_2(s,z) + F_3(s,z) \right] ds,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

où

$$\begin{aligned}
y_1(s,z) &= \int_0^s F_1(t,z)dt, \\
y_2(s,z) &= \int_0^s \left[D_z F_1(t,z) \int_0^t F_1(r,z)dr + F_2(t,z) \right] dt,
\end{aligned}$$

supposons que

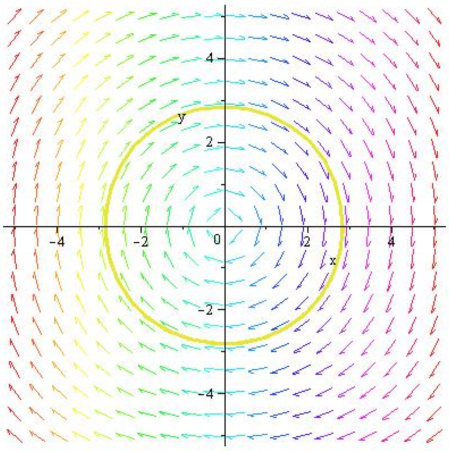


FIGURE 2.4 – Portrait de phase du système (2.16) pour $\varepsilon = 0.01$.

(i) *$F_1(t,.) \in C^2$, $F_2(t,.) \in C^1$, Pour tout $t \in \mathbb{R}$ F_1, F_2, F_3 R, D_xF_1 et D_xF_2 sont localement lipschitziennes par rapport à x. R est deux fois différentiable par rapport à ε.*

(ii) *pour $V \in D$, un ensemble ouvert et borné et pour tout $\varepsilon \in \,]-\varepsilon_f, \varepsilon_f\,[\;\; 0$, il existe $a_\varepsilon \in V$ tel que $F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) + \varepsilon^2 F_{30}(a_\varepsilon) = 0$ et $d_B(F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon + \varepsilon^2 F_{30}(a_\varepsilon, V, 0) \neq 0$.*

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisament petit, il existe une solution $\varphi(., \varepsilon)$ T-périodique pour le système (2.17).

Les conditions (i) et (ii) de théorème 2.3.2 peuvent être remplacées par (j) et (jj) respectivement

(j) $F_1, F_2, R, D_xF_1, D_x^2F_1$ et D_xR sont définies continues et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0, +\infty\,[\, \times D$, $-\varepsilon_f < \varepsilon < \varepsilon_f$.

(jj) $F_{10}(z) = 0$, $F_{20}(z) = 0$, $\forall\ z \in D$ et pour $a \in D$ avec $F_{30}(a) = 0$, on a $J_{F_{30}}(a) \neq 0$.

2.3.1 Application

1. Cycles limites des équations différentiels polynomiaux de Liénard généralisés

En 2009, Llibre, Mereu and Teixeira [31] ont étudié par la méthode de moyennisation, le nombre maximum de cycles limites $\tilde{H}(m, n)$ qui peuvent bifurquer des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ perturbé par une classe d'équations différentielles de Liénard de degré m et n de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k (f_n^k(x)y + g_m^k(x)), \end{cases} \tag{2.19}$$

où pour tout k le polynôme $g_m^k(x)$ est de degré m, le polynôme $f_n^k(x)$ est de degré n en x, ε est un petit paramètre.
Ils ont calculé et donné des estimations inférieurs pour $\tilde{H}(m,n)$. Plus précisément, ils ont calculé le nombre maximum de cycles limites $\tilde{H}_k(m,n)$ qui peuvent bifurquer des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$, en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre k, pour $k = 1, 2, 3$. Ils ont obtenu aussi que $\tilde{H}_k(m,n) \leq \hat{H}(m,n)$ pour $k = 1, 2, 3$ pour les valeurs en lesquelles $\hat{H}(m,n)$ est connu.

Théorème 2.3.2 *On suppose que pour $k = 1, 2, 3$ les polynômes $f_n^k(x)$ et $g_m^k(x)$ sont de degré n et m respectivement où $n, m \geq 1$. Soit $|\varepsilon| > 0$ est un paramètre suffisamment petit. Le nombre maximum de cycles limites des systèmes différentielles de Liénard généralisé* (2.19) *qui peuvent bifurquer du centre linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$, en utilisant la théorème de moyennisation*

(*a*) *du premier ordre est $\tilde{H}_1(m,n) = [\frac{n}{2}]$.*

(*b*) *du deuxième ordre est $\tilde{H}_2(m,n) = \{[\frac{n-1}{2}] + [\frac{m}{2}], [\frac{n}{2}]\}$.*

(*c*) *du troisième ordre est $\tilde{H}_3(m,n) = [\frac{n+m-1}{2}]$.*

Preuve de la partie (a) du théorème 2.3.2 : Nous allons appliquer la méthode de moyennisation du premier ordre, pour cela nous écrivons le système (2.19) où k = 1, en coordonnées polaires (r, θ) où $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. On pose $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, Le système (2.19) s'écrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \left(\sum_{i=0}^{n} a_i r^{i+1} \cos^i\theta \sin^2\theta + \sum_{i=0}^{m} b_i r^i \cos^i\theta \sin\theta \right), \\ \dot{\theta} = -1 - \frac{\varepsilon}{r} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i r^{i+1} \cos^{i+1}\theta \sin\theta + \sum_{i=0}^{m} b_i r^i \cos^{i+1}\theta \right). \end{cases} \tag{2.20}$$

Si on prend θ comme une nouvelle variable indépendante, le système (2.20) devient

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \varepsilon \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cos^i\theta \sin^2\theta + \sum_{i=0}^{m} b_i r^i \cos^i\theta \sin\theta \right) + O(\varepsilon^2),$$

et

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cos^i\theta \sin^2\theta + \sum_{i=0}^{m} b_i r^i \cos^i\theta \sin\theta \right) d\theta.$$

Pour calculer l'expression exacte de $F_{10}(r)$, on utilise les formules suivantes

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^i\theta\sin^2\theta d\theta &= \begin{cases}\alpha_{2k}, & \text{si i=2k,}\\ 0, & \text{si i=2k+1,}\end{cases}\\ \int_0^{2\pi}\cos^i\theta\sin\theta d\theta &= 0,\end{aligned}$$

d'où

$$F_{10}(r)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}a_{2k}\alpha_{2k}. \tag{2.21}$$

Donc le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus $[\frac{n}{2}]$ racines positives, et de plus on peut choisir les coefficients a_{2k} de tel que $F_{10}(r)$ admet exactement $[\frac{n}{2}]$ racines positives simples.

Preuve de la partie (b) du théorème 2.3.2 Nous allons appliquer la méthode de moyennisation du deuxième ordre. Pour cela nous écrivons le système (2.19) où $k=2$, en coordonnées polaires (r,θ) où $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r>0$. On pose $f_1(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, $f_2(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i$, $g_1(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i$ et $g(x)=\sum_{i=0}^{n}d_ix^i$.
Le système (2.19) s'écrit comme suit

$$\begin{cases}\dot r = & -\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{n}a_ir^{i+1}\cos^i\theta\sin^2\theta+\sum_{i=0}^{m}b_ir^i\cos^i\theta\sin\theta\right)\\ & -\varepsilon^2\left(\sum_{i=0}^{n}c_ir^{i+1}\cos^i\theta\sin^2\theta+\sum_{i=0}^{m}d_ir^i\cos^i\theta\sin\theta\right),\\ \dot\theta = & -1-\frac{\varepsilon}{r}\left(\sum_{i=0}^{n}a_ir^{i+1}\cos^{i+1}\theta\sin\theta+\sum_{i=0}^{m}b_ir^i\cos^{i+1}\theta\right)\\ & -\frac{\varepsilon^2}{r}\left(\sum_{i=0}^{n}c_ir^{i+1}\cos^{i+1}\theta\sin\theta+\sum_{i=0}^{m}d_ir^i\cos^{i+1}\theta\right).\end{cases} \tag{2.22}$$

Considérons θ comme une nouvelle variable indépendante, alors le système (2.25) devient

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{\dot r}{\dot\theta}=\varepsilon F_1(r,\theta)+\varepsilon^2F_2(r,\theta)+O(\varepsilon^3),$$

où

$$\begin{aligned}
F_1(r,\theta) &= \sum_{i=0}^{n} a_i r^{i+1}\cos^i\theta\sin^2\theta + \sum_{i=0}^{m} b_i r^i \cos^i\theta\sin\theta,\\
F_2(r,\theta) &= \left(\sum_{i=0}^{n} c_i r^{i+1}\cos^i\theta\sin^2\theta + \sum_{i=0}^{m} d_i r^i\cos^i\theta\sin\theta\right)\\
&\quad -r\cos\theta\sin\theta\left(\sum_{i=0}^{n} a_i r^i\cos^i\theta\sin\theta + \sum_{i=0}^{m} b_i r^{i-1}\cos^i\theta\right)^2.
\end{aligned}$$

Déterminons la fonction $F_{20}(r)$ correspondante. Pour cela, on pose $F_{10}(r)\equiv 0$ qui est L'équivalent au $a_{2k}=0$, ensuite calculons

$$\frac{dF_1(r,\theta)}{dr} = \sum_{i=0}^{n}(i+1)a_i r^i\cos^i\theta\sin^2\theta + \sum_{i=0}^{m} i b_i r^{i-1}\cos^i\theta\sin\theta,$$

et

$$\begin{aligned}
y_1(r,\theta) &= \int_0^\theta F_1(s,r)ds\\
&= a_1r^2(\alpha_{11}\sin\theta+\alpha_{21}\sin(3\theta)) + ... + a_l r^{l+1}\left(\alpha_{1l}\sin\theta+\alpha_{2l}\sin(3\theta)+...\right.\\
&\quad \left.+\alpha_{\frac{l+3}{2}l}\sin((l+3)\theta)\right) + a_0 r(\alpha_{10}\theta+\alpha_{20}\sin(2\theta)) + ... + a_b r^{b+1}\left(\alpha_{1b}\theta\right.\\
&\quad \left.+\alpha_{2b}\sin(2\theta)+...+\alpha_{\frac{b+4}{2}b}\sin((b+2)\theta)\right) + b_0(1-\cos\theta)+...\\
&\quad +b_m r^m(1-\cos^{m+1}\theta), \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

où l est le plus grand nombre impair inférieur ou égal à n. b est le plus grand nombre pair inférieur ou égal à n. α_{2k} sont des constantes réelles qui figurent dans $\int_0^{2\pi}\cos^{2k}\theta\sin^2\theta$ pour tout k.
On sait que d'aprés (2.21), F_{10} est identiquement nulle si et seulement si $a_{2k}=0$ pour tout k. On sait que :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\cos^s\theta\sin^2\theta d\theta &= \begin{cases} A_{2i}, & \text{si s=2i,}\\ 0, & \text{si s=2i+1.}\end{cases}\\
\int_0^{2\pi}\cos^i\theta\sin\theta d\theta &= 0.\\
\int_0^{2\pi}\cos^i\theta\sin^3\theta d\theta &= 0.\\
\int_0^{2\pi}\cos^i\theta\sin^2\theta\sin((2k+1)\theta)d\theta &= 0.\\
\int_0^{2\pi}\cos^s\theta\sin\theta\sin((2k+1)\theta)d\theta &= \begin{cases} B_{2i}^{2k+1}, & \text{si s=2i,}\\ 0, & \text{si s=2i+1.}\end{cases}
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{2\pi}\frac{dF_1(\theta,r)}{dr}.y(\theta,r)d\theta = r(\tilde{\alpha}_{10}a_1b_0+(\tilde{\alpha}_{12}a_1b_2+\tilde{\alpha}_{30}a_3b_0)r^2+...+\sum_{i+j=l+k}\tilde{\alpha}_{ij}a_ib_j),$$

n	m	l	k	$\frac{l+k-1}{2}$	$[\frac{n-1}{2}]+[\frac{m}{2}]$
impair	*pair*	n	m	$\frac{n+m-1}{2}$	$\frac{n-1}{2}+\frac{m}{2}$
pair	*pair*	$n-1$	m	$\frac{n-1+m-1}{2}$	$\frac{((n-1)-1)}{2}+\frac{m}{2}$
impair	*impair*	n	$m-1$	$\frac{n+m-1-1}{2}$	$\frac{(n-1)}{2}+\frac{(m-1)}{2}$
pair	*impair*	$n-1$	$m-1$	$\frac{n-1+m-1-1}{2}$	$\frac{((n-1)-1)}{2}+\frac{(m-1)}{2}$

TABLE 2.1 – Les valeures $l+k-1/2$ ...

où $\tilde{\alpha}_{ij} = -\frac{1+i}{i+j}A_{i+j+1} + j\left(\alpha_{1i}B_j^1 + \alpha_{2i}B_j^2 + ... + \alpha_{\frac{i+3}{2}i}B_j^{i+2}\right)$ pour tout i, j et k est le plus grand pair de n.
De plus, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} F_2(\theta,r)d\theta &= \sum_{\substack{i=0\\ \text{i pair}}}^{b} c_i r^{i+1}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\theta d\theta + \sum_{\substack{j=0\\ \text{j pair}}}^{k}\sum_{\substack{i=1\\ \text{i impair}}}^{k} 2r^{i+j}a_ib_j \\ &\quad\times\int_0^{2\pi}\cos^{i+j+1}\theta\sin^2\theta d\theta = A_0c_0r + ... + A_bc_br^{b+1} + 2(A_2a_1b_0r \\ &\quad +A_4(a_3b_0+a_1b_2)r^3 + ... + A_{l+k+1}r^{l+k}\sum_{i+j=l+k} a_ib^j).\end{aligned}$$

On obtient alors le polynôme $F_{20}(r)$ qui est égale à :

$$\begin{aligned}&r(\rho_{10}a_1b_0r + (\rho_{12}a_1b_2 + \rho_{30}a_3b_0)r^2 + (\rho_{14}a_1b_4 + \rho_{32}a_3b_2 + \rho_{50}a_5b_0)r^4 + ... \\ &+\rho_{lk}a_lb_kr^{l+k-1} + A_0c_0 + A_2c_2r^2 + ... + A_bc_br^b),\end{aligned} \tag{2.24}$$

où $\rho_{ij} = \tilde{\alpha}_{ij} + 2A_{i+j+1}$ pour tout i, j. Pour trouver les racines positives réelles de $F_{20}(r)$, nous devons trouver les racines d'un polynôme dans r^2 de degré égal au $\max\{\frac{l+k-1}{2}, \frac{b}{2}\}$. On a $\frac{b}{2} = [\frac{n}{2}]$ et $\frac{l+k-1}{2} = [\frac{n-1}{2}] + [\frac{m}{2}]$ (voir TABLE 2.1).
Nous concluons que F_{20} a au plus $\max\{[\frac{n-1}{2}] + [\frac{m}{2}], [\frac{n}{2}]\}$ racines positives.

Preuve de la partie (c) du théorème 2.3.2 On pose $f_1(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$, $f_2(x) = \sum_{i=0}^{n} c_ix^i$, $f_3(x) = \sum_{i=0}^{n} p_ix^i$, $g_1(x) = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$, $g_2(x) = \sum_{i=0}^{n} d_ix^i$ et $g_3(x) = \sum_{i=0}^{n} q_ix^i$.
Le système (2.19) s'écrit comme suit

$$\begin{cases}\dot{r} = & -\sin\theta\left(\varepsilon A + \varepsilon^2 B + \varepsilon^3 C\right), \\ \dot{\theta} = & -1 - \frac{\cos\theta}{r}\left(\varepsilon A + \varepsilon^2 B + \varepsilon^3 C\right),\end{cases} \tag{2.25}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=0}^{n} a_i r^{i+1} \cos^i\theta \sin^2\theta + \sum_{i=0}^{m} b_i r^i \cos^i\theta \sin\theta, \\ B &= \sum_{i=0}^{n} c_i r^{i+1} \cos^i\theta \sin^2\theta + \sum_{i=0}^{m} d_i r^i \cos^i\theta \sin\theta, \\ C &= \sum_{i=0}^{n} p_i r^{i+1} \cos^i\theta \sin^2\theta + \sum_{i=0}^{m} q_i r^i \cos^i\theta \sin\theta. \end{aligned}$$

Considérons θ comme une nouvelle variable indépendante, alors le système (2.25) devient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon A \sin\theta + \varepsilon^2 \left(B\sin\theta - \frac{A^2\cos\theta\sin\theta}{r} \right) + \varepsilon^3 \left(\frac{A^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2 - \frac{2AB\cos\theta\sin\theta}{r}} + C\sin\theta \right).$$

De (2.25) $F_{10}(r)$ est identiquement nulle si et seulement si $a_{2k} = 0$, pour tout k. De (2.24) nous obtenons $F_{20}(r)$ est identiquement nulle si et seulement si a_i, b_j et c_k qui satisfaisant l'équation suivante

$$c_\mu = \frac{1}{A_\mu} \sum_{\substack{i+j=\mu+1 \\ \text{i impair, j pair}}} \rho_{ij} a_i b_j, \tag{2.26}$$

où μ est pair.
Pour appliquer la méthode de moyennissation du troisième ordre, nous devons calculer la fonction F_{30}. Donc la preuve de la partie (c) du théorème 2.3.2 sera la conséquence directe des lemmes suivants.
La preuve des lemmes suivants est simple et résulte de quelques calculs fastidieux.

Lemme 2.3.1 *Les fonctions correspondantes* $y_1(\theta, r)$ *et* $y_2(\theta, r)$ *de la méthode de moyennisation du troisième ordre sont exprimées par* (2.23) *et*

$$y_2(\theta, r) = C_0 + C_1 r + C_2 r^2 + ... + C_\lambda r^\lambda.$$

Où $\lambda = \max\{2n+1, 2m-1\}$ *et*

$$\begin{aligned}
C_{2k+1} \;=\; & \sum_{i+j=2k} c^0_{ij}a_ia_j + \sum_{i+j=2k+2} d^0_{ij}b_ib_j + \sum_{i+j=2k+1} e^0_{ij}a_ib_j\theta + \sum_{i+j=2k} f^0_{ij}a_ia_j\theta^2 \\
& + d_{2k+1} + c_{2k}\theta + \sum_{i+j=2k+2} b_ib_j \left(\sum_{i=0}^{k+1} a^0_{2i+1}\cos(2i+1)\theta\right) + \left(\sum_{i+j=2k} a_ia_j\right. \\
& \left.\sum_{i+j=2k+2} b_ib_j + \sum_{i+j=2k+1} a_ib_j\theta + d_{2k+1}\right)\left(\sum_{i=0}^{k+1} a^0_{2i+2}\cos(2i+2)\theta\right) \\
& + \sum_{i+j=2k+1} a_ib_j \left(\sum_{i=0}^{k+1} a^1_{2i+1}\sin(2i+1)\theta\right) + \left(\sum_{i+j=2k+1} a_ib_j + \sum_{i+j=2k} a_ia_j\theta\right. \\
& \left. + c_{2k}\right)\left(\sum_{i=0}^{k+1} a^1_{2i+2}\sin(2i+2)\theta\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2k} \;=\; & \sum_{i+j=2k-1} c^1_{ij}a_ia_j + \sum_{i+j=2k+1} d^1_{ij}b_ib_j + \sum_{i+j=2k} e^1_{ij}a_ib_j\theta \left(\sum_{i+j=2k-1} a_ia_j\right. \\
& \left.\sum_{i+j=2k+1} b_ib_j + \sum_{i+j=2k} a_ib_j\theta\right)\left(\sum_{i=0}^{k+1} b^0_{2i+1}\cos(2i+1)\theta\right)\left(\sum_{i+j=2k+1} b_ib_j\right) \\
& \left(\sum_{i=0}^{k+1} b^0_{2i+2}\cos(2i+2)\theta\right) + \left(\sum_{i+j=2k} a_ib_j + c_{2k-1} + \sum_{i+j=2k} a_ib_j\theta\right) \\
& \left(\sum_{i=0}^{k+1} b^1_{2i+1}\sin(2i+1)\theta\right) + \left(\sum_{i+j=2k} a_ib_j\right)\left(\sum_{i=0}^{k+1} b^1_{2i+2}\sin(2i+2)\theta\right).
\end{aligned}$$

Où $a^l_{2i+1}, a^l_{2i+2}, b^l_{2i+1}, b^l_{2i+2}, c^l_{ij}, d^l_{ij}, e^l_{ij}, f^l_{ij}$ *sont des constantes réelles pour* $l = 1, 2$ *et* $k = 0, 1, ..., \frac{\lambda}{2}$.

Lemme 2.3.2 *L'intégrale* $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(s,r)(y_1(s,r))^2 ds$ *est le polynôme*

$$\pi(D_0 + D_1 r + D_2 r^2 + ... + D_k r^k), \tag{2.27}$$

où

$$k = \begin{cases} n+2m-1, & \text{si } m>n+1 \text{ et } m \text{ ou } n \text{ pair,} \\ n+2m-2, & \text{si } m>n+1 \text{ et } m \text{ ou } n \text{ impair,} \\ 3n+1, & \text{si } m \le n+1 \text{ et } n \text{ pair,} \\ 3n, & \text{si } m \le n+1 \text{ et } n \text{ impair,} \end{cases}$$

et

$$D_\chi = \sum_{i+j+k=\chi-1} \beta^1_{ijk}a_ia_ja_k + \sum_{i+j+k=\chi+1} \lambda^1_{ijk}a_ib_jb_k + \sum_{i+j+k=\chi} \delta^1_{ijk}a_ia_jb_k,$$

pour $\chi = 0, 1, ..., k$ *où* $\beta^1_{ijk}, \lambda^1_{ijk}, \delta^1_{ijk}$ *sont des constantes réelles.*

Lemme 2.3.3 *L'intégrale* $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\frac{\partial F_1}{\partial r}(s,r)(y_2(s,r))^2 ds$ *est le polynôme*

$$\frac{\pi}{2}(E_0 + E_1 r + E_2 r^2 + ... + E_\vartheta r^\vartheta), \tag{2.28}$$

où

$$\vartheta = \begin{cases} n+2m, & \text{si } m>n+1 \text{ et } n \text{ pair}, \\ n+2m-1, & \text{si } m>n+1 \text{ et } n \text{ impair}, \\ 3n+2, & \text{si } m \leq n+1 \text{ et } n \text{ pair}, \\ 3n+1, & \text{si } m \leq n+1 \text{ et } n \text{ impair}, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} E_{2l+1} &= \sum_{i+j+k=2l-1} \beta^2_{ijk} a_i a_j a_k + \sum_{i+j+k=2l+1} \lambda^2_{ijk} a_i b_j b_k + \sum_{i+j=2l} \delta^2_{ij} b_i c_j \\ &\quad + \sum_{i+j=2l} \eta^2_{ij} a_i d_j + \sum_{\substack{i+j+k=2l \\ i \text{ pair}}} \nu^2_{ijk} a_i a_j b_k \pi, \\ E_{2l} &= \sum_{i+j+k=2l-2} \beta^2_{ijk} a_i a_j a_k + \sum_{i+j+k=2l} \lambda^2_{ijk} a_i b_j b_k + \sum_{i+j=2l-1} \delta^2_{ij} b_i c_j \\ &\quad + \sum_{i+j=2l-1} \eta^2_{ij} a_i d_j + \sum_{\substack{i+j+k=2l-1 \\ i \text{ pair}}} \nu^2_{ijk} a_i a_j b_k \pi + \sum_{\substack{i+j+k=2l-2 \\ i \text{ pair}}} \zeta^2_{ijk} a_i c_j \pi, \end{aligned}$$

pour $l = 0, 1, ..., \frac{\vartheta}{2}$ *où* $\beta^2_{ijk}, \lambda^2_{ijk}, \delta^2_{ijk}, \eta^2_{ij}, \nu^2_{ijk}, \zeta^2_{ijk}$ *sont des constantes réelles.*

Lemme 2.3.4 *L'intégrale* $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\frac{\partial F_2}{\partial r}(s,r)y_1(s,r)ds$ *est le polynôme*

$$\frac{\pi}{2}(F_0 + F_1 r + F_2 r^2 + ... + F_\upsilon r^\upsilon), \tag{2.29}$$

où

$$\upsilon = \begin{cases} n+2m, & \text{si } m>n+1 \text{ et } n \text{ pair}, \\ n+2m-1, & \text{si } m>n+1 \text{ et } n \text{ impair}, \\ 3n+2, & \text{si } m \leq n+1 \text{ et } n \text{ pair}, \\ 3n+1, & \text{si } m \leq n+1 \text{ et } n \text{ impair}, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} F_{2l+1} &= \sum_{i+j+k=2l-1} \beta^3_{ijk} a_i a_j a_k + \sum_{i+j+k=2l+1} \lambda^3_{ijk} a_i b_j b_k + \sum_{i+j=2l} \delta^3_{ij} b_i c_j \\ &\quad + \sum_{i+j=2l} \eta^3_{ij} a_i d_j, \\ F_{2l} &= \sum_{i+j+k=2l-2} \beta^3_{ijk} a_i a_j a_k + \sum_{i+j+k=2l} \lambda^3_{ijk} a_i b_j b_k + \sum_{i+j=2l-1} \delta^3_{ij} b_i c_j \\ &\quad + \sum_{i+j=2l-1} \eta^3_{ij} a_i d_j + \sum_{\substack{i+j+k=2l-1 \\ i \text{ pair}}} \nu^3_{ijk} a_i a_j b_k \pi + \sum_{\substack{i+j+k=2l-2 \\ i \text{ pair}}} \zeta^3_{ijk} a_i c_j \pi, \end{aligned}$$

pour $l = 0, 1, ..., \frac{\upsilon}{2}$ *où* $\beta^3_{ijk}, \lambda^3_{ijk}, \delta^3_{ijk}, \eta^3_{ij}, \nu^3_{ijk}, \zeta^3_{ijk}$ *sont des constantes réelles.*

Lemme 2.3.5 *L'intégrale* $\int_0^{2\pi} F_3(s,r)ds$ *est le polynôme*

$$\frac{\pi}{r}(G_0 + G_1 r + G_2 r^2 + ... + G_\psi r^\psi), \tag{2.30}$$

où

$$\psi = \begin{cases} n+2m, & \text{si } m>n+1 \text{ et } n \text{ pair},\\ n+2m-1, & \text{si } m>n+1 \text{ et } n \text{ impair},\\ 3n+2, & \text{si } m \le n+1 \text{ et } n \text{ pair},\\ 3n+1, & \text{si } m \le n+1 \text{ et } n \text{ impair}, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} G_{2l} \;=\; & \sum_{i+j+k=2l-2} \beta^4_{ijk} a_i a_j a_k + \sum_{i+j+k=2l} \lambda^4_{ijk} a_i b_j b_k + \sum_{i+j=2l-1} \delta^4_{ij} b_i c_j \\ & + \sum_{i+j=2l-1} \eta^4_{ij} a_i d_j + p_{2l-2}, \end{aligned}$$

pour $l = 0, 1, ..., \frac{\psi}{2}$ *où* $\beta^4_{ijk}, \lambda^4_{ijk}, \delta^4_{ijk}, \eta^4_{ij}, \nu^4_{ijk}$ *sont des constantes réelles.*

Par les lemmes 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4 et 2.3.5 nous obtenons

$$F_{30}(r) = \frac{\alpha}{r}(M_0 + M_1 r + M_2 r^2 + ... + M_{\varrho-1} r^{\varrho-1} + M_\varrho r^\varrho),$$

où

$$\begin{aligned} M_{2l+1} \;=\; & \sum_{i+j+k=2l-1} \beta_{ijk} a_i a_j a_k + \sum_{i+j+k=2l+1} \lambda_{ijk} a_i b_j b_k + \sum_{i+j=2l} \delta_{ij} b_i c_j \\ & + \sum_{i+j=2l} \eta_{ij} a_i d_j + \sum_{\substack{i+j=2l \\ \text{i pair}}} \upsilon^3_{ij} a_i a_j b_k \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{2l} \;=\; & \sum_{i+j+k=2l} \beta_{ijk} a_i b_j b_k + \sum_{i+j+k=2l-2} \lambda_{ijk} a_i a_j a_k + \sum_{i+j=2l-1} \delta_{ij} b_i c_j \\ & + \sum_{i+j=2l-1} \eta_{ij} a_i d_j + \sum_{i+j+k=2l-2} \mu_{ijk} a_i a_j a_k + \varpi_{2l-2} p_{2l-2} \\ & + \left(\sum_{\substack{i+j+k=2l-1 \\ \text{i pair}}} \upsilon_{ijk} a_i a_j b_k + \sum_{\substack{i+j=2l-2 \\ \text{i pair}}} \rho_{ijk} a_i c_j \right) \pi \\ & + \sum_{\substack{i+j+k=2l-2 \\ \text{i pair}}} \tau_{ijk} a_i a_j a_k \pi^2, \end{aligned} \tag{2.31}$$

pour $l = 0, 1, ..., \frac{\varrho}{2}$ et

$$\varrho = \begin{cases} n+2m, & \text{si m>n+1 et n pair},\\ n+2m-1, & \text{si m>n+1 et n impair},\\ 3n+2, & \text{si } m \le n+1 \text{ et n pair},\\ 3n+1, & \text{si } m \le n+1 \text{ et n impair}. \end{cases}$$

On sait que $a_{2k} = 0$, on obtient $M_0 = 0$ et $M_{2k+1} = 0$. De plus $c_k = \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ \text{i impair, j pair}}} a_i b_j$, pour tout $k > b$ et $M_k = 0$, pour tout k le plus grand

$$\lambda = \begin{cases} n+2m-2, & \text{si m>n+1 et n, impair,} \\ n+2m-1, & \text{si m>n+1 et n impair et n pair,} \\ 3n+2, & \text{si } m \leq n+1 \text{ et n,m pair,} \\ 3n+1, & \text{si } m \leq n+1 \text{ et n pair et m impair.} \end{cases}$$

Donc

$$F_{30}(r) = \alpha r (M_2 + M_4 r^2 + M_6 r^4 + ... + M_{\lambda-4} r^{\lambda-2} + M_{\lambda-2} r^{\lambda}),$$

où

$$M_\omega = \sum_{\substack{i+j+k=\omega \\ \text{i impair} \\ \text{j pair} \\ \text{k impair}}} \beta'_{ijk} a_i b_j b_k + \sum_{\substack{i+j=\omega-1 \\ \text{i pair} \\ \text{j impair}}} \delta'_{ij} b_i c_j + \sum_{\substack{i+j=\omega-1 \\ \text{i impair} \\ textjpair}} \eta'_{ij} a_i d_j + \varpi_\omega p_{\omega-2}\pi.$$

Par conséquent, $F_{30}(z)$ est un polynôme de degré λ dans la variable r^2. Donc $F_{30}(z)$ a au plus $[\frac{n+m-1}{2}]$ racines positives.

2.4 Autre méthode de moyennisation

On considère le problème de bifurcation des solutions T-périodiques du système différentiel

$$\dot{x}(t) = F_0(t,x) + \varepsilon F_1(t,x) + \varepsilon^2 F_2(t,x,\varepsilon), \tag{2.32}$$

avec ε suffisamment petit. Les fonctions $F_0, F_1 : \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}^n$, $F_2 : \mathbb{R}\times\Omega\times(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ sont de classe C^2, T-périodique en t, et Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le système non perturbé :

$$\dot{x}(t) = F_0(t,x), \tag{2.33}$$

a une sous variété de dimension n des solutions périodiques.
Soit $x(t,z)$ la solution du système non perturbé (2.33) telle que $x(0,z) = z$. Nous écrivons la linéarisation du système non perturbé le long de la solution périodique $x(t,z)$ est :

$$\dot{y} = D_x F_0(t, x(t,z))\, y. \tag{2.34}$$

Notons par $M_z(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.34) et par $\xi : \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ la projection de $\mathbb{R}^n$ sur ses k premières coordonnées, c.à.d $\xi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_k)$.
Une réponse au problème de la bifurcation des solutions périodiques pour le système (2.32) est donnée par les résultats suivants :

Théorème 2.4.1 *Soit $V \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert borné et soit $\beta : Cl(V) \to \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de classe C^2. Supposons que :*

(i) $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in Cl(V)\} \subset \Omega$ et pour chaque $z_\alpha \in Z$ la solution $x(t, z_\alpha)$ de (2.33) est T-périodique.

(ii) Pour chaque $z_\alpha \in Z$ il y a une matrice fondamentale $M_z(t)$ de (2.34) telle que la matrice $M_z^{-1}(0) - M_z^{-1}(2\pi)$ a dans le bloc supérieur droit matrice $k\times(n-k)$ nulle et dans le bloc inférieur droit la matrice $\Delta_\alpha (n-k)\times(n-k)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

On considère la fonction $\mathcal{F} : Cl(V) \to \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi\left(\frac{1}{T}\int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t)\, F_1(t, x(t, z_\alpha))\, dt\right). \tag{2.35}$$

S'il existe $\alpha \in V$ avec $\mathcal{F}(\alpha) = 0$ et $\det((d\mathcal{F}/dz)(\alpha)) \neq 0$, alors il existe une solution de période T $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.32) tels que $\varphi(t, \varepsilon) \to z_\alpha$ quand $\varepsilon \to 0$.

Nous supposons qu'il existe un ensemble ouvert V avec $Cl(V) \subset \Omega$ tels que pour chaque $z \in Cl(V)$, $x(t, z, 0)$ est T périodique. L'ensemble $Cl(V)$ est isochrone pour le système (2.32), c.à.d il est un ensemble formé seulement par des orbites périodiques, toutes ayant la même période.

Corollaire 2.4.1 *(perturbation d'un ensemble isochrone) un ensemble V ouvert et borné avec $Cl(V) \subset \Omega$ tel que pour chaque $z \in Cl(V)$, la solution $x(t, z, 0)$ est T périodique, alors nous considérons la fonction $\mathcal{F} : Cl(V) \to \mathbb{R}^n$*

$$\mathcal{F}(z) = \int_0^T M_z^{-1}(t)\, F_1(t, x(t, z, 0))\, dt. \tag{2.36}$$

S'il existe $\alpha \in V$ avec $\mathcal{F}(\alpha) = 0$ et $\det((d\mathcal{F}/dz)(\alpha)) \neq 0$, alors il existe une solution T-périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.32) tels que $\varphi(0, \varepsilon) \to \alpha$ quand $\varepsilon \to 0$.

2.4.1 Application

1. Bifurcation de Hopf du système Michelson :

En 2011, Llibre et Zhang [35] ont prouvé l'existence de bifurcation de zero-Hopf du système differentiel de Michelson

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = c^2 - y - \frac{1}{2}x^2, \end{cases} \tag{2.37}$$

avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $c \geq 0$ est un paramètre réel. Lorsque $c = 0$ le système (2.37) à l'origine comme une singularité ayant des valeurs propres $0, \pm i$. Et Lorsque $c > 0$ assez petit le système (2.37) a une orbite périodique qui tend vers l'origine quand c tend vers zéro. Maintenant nous présentons les résultats principaux.

Théorème 2.4.2 *Pour $c \geq 0$ suffisamment petit, le système de Michelson (2.37) a une bifurcation de zéro-hopf à l'origine pour $c = 0$. De plus pour $c > 0$ suffisamment petit, les cycles limites qui bifurquent satisfait $x(t) = -2c\cos t + O(c)$, $y(t) = 2c\sin t + O(c)$ et $z(t) = 2c\cot t + O(c)$.*

Preuve : Pour $\varepsilon \neq 0$, on pose le changement des variables $x = \varepsilon\bar{x}$, $y = \varepsilon\bar{y}$, $z = \varepsilon\bar{z}$ et $c = \varepsilon d$, alors le système Michelson (2.37) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y + \varepsilon d^2 - \varepsilon\frac{1}{2}x^2. \end{cases} \tag{2.38}$$

Nous utilisons toujours x, y, z au lieu de $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Posons $x = x$, $y = r\sin\theta$ et $z = r\cos\theta$, alors le système (2.38) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = r\sin\theta, \\ \dot{r} = \frac{\varepsilon}{2}(2d^2 - x^2)\cos\theta, \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\varepsilon}{2r}(2d^2 - x^2)\sin\theta. \end{cases} \tag{2.39}$$

Ce système peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = r\sin\theta + \frac{\varepsilon}{2}(2d^2 - x^2)\sin^2\theta + \varepsilon^2 f_1(\theta, r, \varepsilon), \\ \frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon}{2}(2d^2 - x^2)\cos\theta + \varepsilon^2 f_2(\theta, r, \varepsilon). \end{cases} \tag{2.40}$$

Où f_1 et f_2 sont des fonctions analytiques dans leurs variables.
Pour $(x_0, r_0) \neq (0, 0)$, le système $(2.40)_{\varepsilon=0}$ a une solution 2π périodique.

$$x(\theta) = r_0 + x_0 - r_0\cos\theta, r(\theta) = x_0, \tag{2.41}$$

tel que $x(0) = x_0$ et $r(0) = r_0$. La première équation variationnelle de $(2.40)_{\varepsilon=0}$ le long de la solution (2.41) est

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{d\theta} \\ \frac{dy_2}{d\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Il a la matrice M(t) de solution fondamentale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 - \cos\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.42}$$

qui est indépendante de la condition initiale (x_0, r_0). En appliquant le corollaire 2.4.1 au système différentiel (2.40), nous avons

$$\mathcal{F}(x_0, r_0) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} M^{-1} \begin{pmatrix} (2d^2 - x^2)\sin^2\theta \\ (2d^2 - x^2)\cos\theta \end{pmatrix} |_{(2.41)} d\theta.$$

Alors $\mathcal{F}(x_0, r_0) = (g_1(x_0, r_0), g_2(x_0, r_0))$ avec

$$g_1(x_0, r_0) = \frac{1}{4}(4d^2 - 5r_0^2 - 6r_0x_0 - 2x_0^2), \quad g_1(x_0, r_0) = \frac{1}{2}r_0(x_0 + r_0).$$

Le système d'équations $\mathcal{F} = 0$ a une seule solution réelle donnée par $(x_0, r_0) = (-2d, 2d)$ et comme le jacobien $D\mathcal{F}(x_0, r_0)|_{(x_0,r_0)=(-2d,2d)} = d^2 \neq 0$. Pour $d > 0$ et $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit et d'après le corollaire 2.4.1, le système (2.40) a une seule solution périodique $(x(\theta, \varepsilon), r(\theta, \varepsilon))$ de période 2π tel que $(x(0, \varepsilon), r(0, \varepsilon)) \longrightarrow (-2d, 2d)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. les valeurs propres de $D\mathcal{F}(x_0, r_0)|_{(x_0,r_0)=(-2d,2d)}$ sont $\pm di$. Cela montre que l'orbite périodique est linéairement stable.
Pour $c > 0$ suffisamment petit le système de Michelson (2.38) a une orbite périodique donnée par $x(t) = -2c\cos t + o(c)$, $y(t) = 2c\sin t + o(c)$ et $z(t) = 2c\cos t + o(c)$.

2. **Solution périodique pour une classe des équations différentielles non autonome de Newton :**
En 2016, Llibre et Makhlouf [29] ont étudié l'existence des solutions périodiques de l'équation différentielle non autonome du deuxième ordre.

$$\ddot{x} = -\nabla_x V(t, x), \tag{2.43}$$

où $V(t, x) = \frac{\|x\|^2}{2} + \varepsilon W(t, x)$ avec $W(t, x)$ une fonction 2π périodique par rapport à la variable t, ε est petit paramètre réel, $x = (x_1, ..., x_n)$ et

$$\nabla_x V(x, t) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial V}{\partial x_n}\right).$$

Théorème 2.4.3 *Nous définissons les fonctions*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t \frac{\partial W}{\partial x_k}\left(t, x_{10}\cos t + y_{10}\sin t, ..., x_{n0}\cos t + y_{n0}\sin t\right) dt, \\
\mathcal{F}_{2k} &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos t \frac{\partial W}{\partial x_k}\left(t, x_{10}\cos t + y_{10}\sin t, ..., x_{n0}\cos t + y_{n0}\sin t\right) dt,
\end{aligned}$$

pour $k = 1, ..., n$. Si la fonction $W(t, x_1, ..., x_n)$ est 2π-périodique par rapport à la variable t, alors pour chaque $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit et pour chaque $(x_{10}^*, ..., x_{n0}^*, y_{10}^*, ..., y_{n0}^*)$ solution du système

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_k\left(x_{10}, ..., x_{n0}, y_{10}, ..., y_{n0}\right) = 0, \\
&\mathcal{F}_{2k}\left(x_{10}, ..., x_{n0}, y_{10}, ..., y_{n0}\right) = 0, \qquad \textit{Pour} \quad k{=}1,...,n,
\end{aligned} \tag{2.44}$$

satisfaisant

$$\det\left(\frac{\partial\left(\mathcal{F}_1,...,\mathcal{F}_{2n}\right)}{\partial\left(x_{10},...,x_{n0},y_{10},...,y_{n0}\right)}\backslash_{(x_{10},...,x_{n0},y_{10},...,y_{n0})=\left(x^*_{10},...,x^*_{n0},y^*_{10},...,y^*_{n0}\right)}\right)\neq 0, \tag{2.45}$$

l'équation différentielle non autonome (2.43) *a une solution* 2π *périodique* $x\left(t,\varepsilon\right)$ *qui tend vers la solution* 2π *périodique* $(x^*_{10}\cos t + y^*_{10}\sin t, ..., x^*_{n0}\cos t$ $+y^*_{n0}\sin t)$ *de* $\ddot{x}+x=0$ *quand* $\varepsilon\to 0$.

Preuve : Si $y_i=\dot{x}_i$, pour $i=1,\ldots,n$, alors l'équation différentielle non autonome du deuxième ordre (2.43) peut être écrite comme un système différentiel de premier ordre suivant dans $\mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= y_i,\\ \dot{y}_i &= -x_i-\varepsilon\tfrac{\partial W(t,x)}{\partial x_i}.\end{aligned} \tag{2.46}$$

Pour $i=1,\ldots,n$, pour $\varepsilon=0$, $(x,y)=(0.0)$ est le point d'équilibre de système (2.46). Les valeurs propres du système linéarisé on ce point sont toutes les imaginaires $\pm i,...,\pm i$. La solution $(x(t),y(t))$ du système non perturbé (c.à.d système (2.46) avec $\varepsilon=0$) tels que $(x(0),y(0))=(x_0,y_0)$ est

$$\begin{aligned}x_i &= x_{i0}\cos t+y_{i0}\sin t,\\ y_i &= y_{i0}\cos t-x_{i0}\sin t.\end{aligned} \tag{2.47}$$

Pour $i=1,...n$, toutes ces orbites sont 2π périodiques. On utilise la notation présentée dans la section 3, nous avons $X=(x,y), z=(x_0,y_0), F_0(x,t)=(y,-x), F_1(x,t)=(0,-\nabla_x W(t,x))$ et $F_2(x,t,\varepsilon)=(0,0)$. La solution de la matrice fondamentale $M_z^{-1}(t)$ est indépendante de z et nous la dénoterons par $M(t)$. Un calcul facile montre que :

$$M(t)=\begin{bmatrix}\cos t & 0 & ... & 0 & \sin t & 0 & ... & 0\\ 0 & \cos t & ... & 0 & 0 & \sin t & ... & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & ... & \cos t & 0 & 0 & ... & \sin t\\ -\sin t & 0 & ... & 0 & \cos t & 0 & ... & 0\\ 0 & -\sin t & ... & 0 & 0 & \cos t & ... & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & ... & -\sin t & 0 & 0 & ... & \cos t\end{bmatrix}$$

et

$$M^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 & ... & 0 & -\sin t & 0 & ... & 0 \\ 0 & \cos t & ... & 0 & 0 & -\sin t & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \cos t & 0 & 0 & ... & -\sin t \\ \sin t & 0 & ... & 0 & \cos t & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sin t & ... & 0 & 0 & \cos t & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \sin t & 0 & 0 & ... & \cos t \end{bmatrix}.$$

Selon le corollaire 2.4.1 nous étudions les zéros $\alpha = (x_0, y_0)$ des composants $2n$ de la fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ donnée dans (3.17). Plus précisément nous avons $\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(\alpha), ..., \mathcal{F}_{2n}(\alpha))$, tels que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(\alpha) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t \frac{\partial W}{\partial x_k}(t, x_{10}\cos t + y_{10}\sin t, ..., x_{n0}\cos t + y_{n0}\sin t)\, dt, \\ \mathcal{F}_{2k}(\alpha) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos t \frac{\partial W}{\partial x_k}(t, x_{10}\cos t + y_{10}\sin t, ..., x_{n0}\cos t + y_{n0}\sin t)\, dt, \end{aligned}$$

pour $k = 1, \dots, n$.

En illustrant par exemple :
Considérons l'équation différentielle non autonome du Newton (2.43) avec le potentiel $V(t, x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + \varepsilon W(t, x_1, x_2)$, où $W(t, x_1, x_2) = \left(ax_1 + bx_2 + cx_1^3 + dx_2^3\right)\sin t$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x_{10}, x_{20}, y_{10}, y_{20}) &= \frac{1}{8}(4a + 3c(x_{10}^2 + 3y_{10}^2)), \\ \mathcal{F}_2(x_{10}, x_{20}, y_{10}, y_{20}) &= \frac{1}{8}(4b + 3d(x_{20}^2 + 3y_{20}^2)), \\ \mathcal{F}_3(x_{10}, x_{20}, y_{10}, y_{20}) &= -\frac{3}{4}cx_{10}y_{10}, \\ \mathcal{F}_4(x_{10}, x_{20}, y_{10}, y_{20}) &= -\frac{3}{4}dx_{20}y_{20}, \end{aligned}$$

Si $ac < 0$ et $bd < 0$, alors le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4 = 0$ a 16 solutions

$(x_{10}^*, x_{20}^*, y_{10}^*, y_{20}^*)$ données par

$$\left(\pm 2\sqrt{-\frac{a}{3c}}, \pm 2\sqrt{-\frac{b}{3d}}, 0, 0\right),$$
$$\left(\pm 2\sqrt{-\frac{a}{3c}}, 0, 0, \pm\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{b}{d}}\right),$$
$$\left(0, \pm 2\sqrt{-\frac{b}{3d}}, \pm\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{a}{c}}, 0\right),$$
$$\left(0, 0, \pm\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{a}{c}}, \pm\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{b}{d}}\right),$$

Nous calculons les déterminants correspondants aux solutions $(x_{10}^*, x_{20}^*, y_{10}^*, y_{20}^*)$

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial(x_{10}, x_{20}, y_{10}, y_{20})}\backslash_{(x_{10},x_{20},y_{10},y_{20})=\left(x_{10}^*,x_{20}^*,y_{10}^*,y_{20}^*\right)}\right) \neq 0,$$

pour ces quatre solutions $(x_{10}^*, x_{20}^*, y_{10}^*, y_{20}^*)$ sont $\frac{9}{16}abcd$, $-\frac{9}{16}abcd$, $-\frac{9}{16}abcd$ et $\frac{9}{16}abcd$ respectivement. Donc, l'équation différentielle (2.43) a quatre solutions 2π-périodiques qui tendent vers les solutions périodiques de l'équation non perturbée.

Chapitre 3

Cycles limites d'une classe de systèmes différentiels généralisés de type Liénard

Sommaire

3.1 Présentation du problème et résultats principaux

En 2014, García et al. [18] ont étudié le nombre maximal de cycles limites de faible amplitude pour les systèmes différentiels plus généralisés de Liénard

$$\dot{x} = y, \;\; \dot{y} = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2, \tag{3.1}$$

où $f(x)$, $g(x)$, et $h(x)$ sont de degrés n peut avoir $[\frac{n}{2}]$ cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre et n cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre.

Dans ce chapitre, en utilisant la théorie de moyennisation du premier et du deuxième ordre, nous étudions le nombre maximal de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire d'une classe de systèmes différentiels de Liénard plus généralisée que (3.1)

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - l(x)y^3, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$, $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$, $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$ et $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x)$. Pour chaque $k = 1, 2$, $f_k(x)$, $g_k(x)$, $h_k(x)$ et $l_k(x)$ sont de degrés n. ε est un paramètre réel supposé petit.

Remarque : Si $l(x) = h(x) = 0$, le système (3.2) coïncide avec les systèmes différentiels généralisés de Lienard (1).

Nos principaux résultats sont les deux théorèmes suivants :

Théorème 3.1.1 *Pour* $|\varepsilon| > 0$ *suffisamment petit, le nombre maximal de cycles limites du systeme différentiel* (3.2) *qui bifurquent du centre linéaire* $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ *en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre est*

$$\tilde{H}_1(n) = [\frac{n}{2}] + 1.$$

Théorème 3.1.2 *Pour* $|\varepsilon| > 0$ *suffisamment petit, le nombre maximal de cycles limites du systeme différentiel* (3.2) *qui bifurquent du centre linéaire* $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ *en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre est*

$$\tilde{H}_2(n) = n + 1.$$

3.2 Preuves des resultats

3.2.1 Preuve du théorème 3.1.1

Pour appliquer la moyennisation d'ordre un, on écrit le système (3.2), en coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta, \;\; y = r\sin\theta \;\text{ avec }\; k = 1. \tag{3.3}$$

Posons :

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad g_1(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i, \quad h_1(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \quad \text{et} \;\; l_1(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i x^i, \tag{3.4}$$

le système (3.2) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = & -\varepsilon \sum_{i=0}^{n} \left(a_i r^i R_i(\theta) + b_i r^{i+1} T_i(\theta) + c_i r^{i+2} S_i(\theta) + d_i r^{i+3} U_i(\theta) \right), \\ \dot{\theta} = & -1 - \frac{\varepsilon}{r} \sum_{i=0}^{n} \left(a_i r^i \cos^{i+1}\theta + b_i r^{i+1} R_{i+1}(\theta) + c_i r^{i+2} T_{i+1}(\theta) \right. \\ & \left. + \, d_i r^{i+3} S_{i+1}(\theta) \right), \end{cases} \tag{3.5}$$

où

$R_j(\theta) = \cos^j\theta \sin\theta$,

$T_j(\theta) = \cos^j\theta \sin^2\theta = cos^j\theta - cos^{j+2}\theta$,

$S_j(\theta) = \cos^j\theta \sin^3\theta = cos^j\theta \sin\theta - cos^{j+2}\theta \sin\theta$,

$U_i(\theta) = \cos^j\theta \sin^4\theta = cos^j\theta - 2cos^{j+2}\theta + cos^{j+4}\theta$.

Considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système (3.5) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \varepsilon F_1(\theta, r) + O(\varepsilon^2),$$

où

$$F_1(\theta, r) = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i r^i R_i(\theta) + b_i r^{i+1} T_i(\theta) + c_i r^{i+2} S_i(\theta) + d_i r^{i+3} U_i(\theta) \right). \tag{3.6}$$

Alors

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n} \Big(a_i r^i J_i(2\pi) + b_i r^{i+1} \tilde{I}_i(2\pi) + c_i r^{i+2} \tilde{J}_i(2\pi) + d_i r^{i+3} \tilde{\tilde{I}}_i(2\pi) \Big), \quad (3.7)$$

où

$J_k(2\pi) = \int_0^{2\pi} R_k(\theta)\, d\theta$, $\tilde{I}_k(2\pi) = \int_0^{2\pi} T_k(\theta)\, d\theta$, $\tilde{J}_k(2\pi) = \int_0^{2\pi} S_k(\theta)\, d\theta$,
$\tilde{\tilde{I}}_k(2\pi) = \int_0^{2\pi} U_k(\theta)\, d\theta$.

Pour calculer l'expression exacte de F_{10}, nous utilisons les expressions des intégrales de l'annexe A. Nous obtenons

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{r}{2\pi} \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \Big(b_{2i} \tilde{I}_{2i}(2\pi) r^{2i} + d_{2i} \tilde{\tilde{I}}_{2i}(2\pi) r^{2i+2} \Big) \\ &= r \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} \left(b_{2i} r^{2i} + d_{2i} \frac{3}{2(i+2)} r^{2i+2} \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

où
$\alpha_k = 3.5.....(2k-1),\ \alpha_{k+1} = (2k+1)\alpha_k.$

Donc le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus $[\frac{n}{2}] + 1$ racines positives.

Exemple 3.2.1 *Dans cette section, nous montrons que la limite supérieure $\tilde{H}_1(n)$ est atteinte dans le cas où $1 \le n \le 5$. Les calculs ont été vérifiés à l'aide de Maple. Nous notons $F_{10}^n(r)$ la fonction $F_{10}(r)/r$ correspondant, un calcul adéquat permet d'obtenir*

- $F_{10}^1(r) = \frac{1}{2}b_0 + \frac{3}{8}d_0 r^2.$
- $F_{10}^2(r) = F_{10}^3(r) = \frac{1}{2}b_0 + (\frac{3}{8}d_0 + \frac{1}{8}b_2)r^2 + \frac{1}{16}d_2 r^4.$
- $F_{10}^4(r) = F_{10}^5(r) = \frac{1}{2}b_0 + (\frac{3}{8}d_0 + \frac{1}{8}b_2)r^2 + (\frac{1}{16}d_2 + \frac{1}{16}b_4)r^4 + \frac{3}{128}d_4 r^6.$

Si nous fixons $b_0 = 2, b_2 = \frac{-20}{3}, b_4 = 8, d_0 = -\frac{8}{3}, d_2 = 8$ and $d_4 = \frac{-64}{9}$. Nous avons

$F_{10}^1(r) = 1 - r^2$, *qui a exactement un racine positive.*
$F_{10}^2(r) = F_{10}^3(r) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3} - r^2)(3 - r^2)$, *qui a exactement deux racines positives.*
$F_{10}^4(r) = F_{10}^5(r) = \frac{1}{6}(1-r^2)(2-r^2)(3-r^2)$, *qui a exactement trois racines positives.*

3.2.2 Preuve du théorème 3.1.2

Pour démontrer le théorème 3.1.2, nous utilisons la méthode de moyennisation d'ordre deux. Tenant compte de (3.4) et en posant

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i, \quad g_2(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i x^i, \quad h_2(x) = \sum_{i=0}^{n} s_i x^i \quad \text{and } l_2(x) = \sum_{i=0}^{n} v_i x^i,$$

avec $k = 1, 2$. Le changement en coordonnées polaires (r, θ), transforme le système (3.3) en

$$\begin{cases} \dot{r} = & -\varepsilon \sum_{i=0}^{n} \left(a_i r^i R_i(\theta) + b_i r^{i+1} T_i(\theta) + c_i r^{i+2} S_i(\theta) + d_i r^{i+3} U_i(\theta) \right) \\ & -\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{n} \left(p_i r^i R_i(\theta) + q_i r^{i+1} T_i(\theta) + s_i r^{i+2} S_i(\theta) + v_i r^{i+3} U_i(\theta) \right), \\ \dot{\theta} = & -1 - \frac{\varepsilon}{r} \sum_{i=0}^{n} \left(a_i r^i \cos^{i+1}\theta + b_i r^{i+1} R_{i+1}(\theta) + c_i r^{i+2} T_{i+1}(\theta) + d_i r^{i+3} S_{i+1}(\theta) \right) \\ & -\frac{\varepsilon^2}{r} \sum_{i=0}^{n} \left(p_i r^i \cos^{i+1}\theta + q_i r^{i+1} R_{i+1}(\theta) r + s_i r^{i+2} T_{i+1}(\theta) + v_i r^{i+3} S_{i+1}(\theta) \right). \end{cases} \tag{3.9}$$

Considérons maintenant θ comme une variable indépendante, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \varepsilon F_1(\theta, r) + \varepsilon^2 F_2(\theta, r) + O(\varepsilon^3), \tag{3.10}$$

où

$$F_1(\theta, r) = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i r^i R_i(\theta) + b_i r^{i+1} T_i(\theta) + c_i r^{i+2} S_i(\theta) + d_i r^{i+3} U_i(\theta) \right), \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} F_2(\theta, r) = & \sum_{i=0}^{n} \left(p_i r^i R_i(\theta) + q_i r^{i+1} T_i(\theta) + s_i r^{i+2} S_i(\theta) + v_i r^{i+3} U_i(\theta) \right) \\ - & \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{n} \left(a_i r^i R_i(\theta) + b_i r^{i+1} T_i(\theta) + c_i r^{i+2} S_i(\theta) + d_i r^{i+3} U_i(\theta) \right) \\ \times & \left(a_i r^i \cos^{i+1}\theta + b_i r^{i+1} R_{i+1}(\theta) + c_i r^{i+2} T_{i+1}(\theta) + d_i r^{i+3} S_{i+1}(\theta) \right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Déterminons la fonction F_{20} correspondante. Pour cela, posons $F_{10} \equiv 0$ qui est équivalent à

$$\begin{cases} b_0 = d_{2[\frac{n}{2}]} = 0, \\ b_{2i} = \frac{-3}{2i-1} d_{2i-2}, \ 1 \leq i \leq [\frac{n}{2}]. \end{cases} \tag{3.13}$$

Tout d'abord, en utilisant (3.13) et en remplaçant dans (3.11) on obtient

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) = & \sum_{i=0}^{n} \left(a_i r^i R_i(\theta) + c_i r^{i+2} S_i(\theta) \right) + \sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(b_{2i+1} r^{2i+2} T_{2i+1}(\theta) \right. \\ + & \left. d_{2i+1} r^{2i+4} U_{2i+1}(\theta) \right) + \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} d_{2i-2} r^{2i+1} \left(T_{2i-2} - \frac{2i+2}{2i-1} T_{2i}(\theta) \right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{dF_1(r,\theta)}{dr} &= \sum_{i=0}^{n}(ia_ir^{i-1}R_i(\theta)+(i+2)c_ir^{i+1}S_i(\theta))+\sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]}((2i+2)b_{2i+1}r^{2i+1}\\ &\times\ T_{2i+1}(\theta)+(2i+4)d_{2i+1}r^{2i+3}U_{2i+1}(\theta))+\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}(2i+1)d_{2i-2}r^{2i}\\ &\times\ (T_{2i-2}-\frac{2i+2}{2i-1}T_{2i}(\theta)).\end{aligned} \tag{3.14}$$

En tenant compte du fait que

$$\frac{1}{2^{2i-2}}\begin{pmatrix}2i-2\\ i-1\end{pmatrix}\theta-\frac{4i+1}{2^{2i}(2i-1)}\begin{pmatrix}2i\\ i\end{pmatrix}\theta+\frac{2i+2}{2^{2i+2}(2i-1)}\begin{pmatrix}2i+2\\ i+1\end{pmatrix}\theta=0,$$

ensuite, en utilisant les intégrales de l'annexe A, nous obtenons

$$\begin{aligned}y(\theta,r) &= \sum_{i=0}^{n}\Big(a_ir^iJ_i(\theta)+c_ir^{i+2}\tilde{J}_i(\theta)\Big)+\sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\Bigg(b_{2i+1}r^{2i+2}\sum_{l=0}^{i+1}\tilde{\gamma}_{i,l}\sin(2l+1)\theta\\ &\quad +d_{2i+1}r^{2i+4}\sum_{l=0}^{i+2}\tilde{\tilde{\gamma}}_{i,l}\sin(2l+1)\theta\Bigg)+\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}d_{2i-2}r^{2i+1}\sum_{l=0}^{i+1}\tilde{\beta}_{i,l}\sin(2l\theta),\end{aligned} \tag{3.15}$$

où

$$\tilde{\gamma}_{i,l} = \begin{cases}\gamma_{i,l}-\gamma_{i+1,l}, & 0\le l\le i,\\ -\gamma_{i+1,i+1}, & l=i+1.\end{cases}$$

$$\tilde{\tilde{\gamma}}_{i,l} = \begin{cases}\gamma_{i,l}-2\gamma_{i+1,l}+\gamma_{i+2,l}, & 0\le l\le i,\\ -2\gamma_{i+1,i+1}+\gamma_{i+2,i+1}, & l=i+1,\\ \gamma_{i+2,i+2}, & l=i+2.\end{cases}$$

$$\tilde{\beta}_{i,l} = \begin{cases}\beta_{i-1,l}-\frac{4i+1}{2i-1}\beta_{i,l}+\frac{2i+2}{2i-1}\beta_{i+1,l}, & 0\le l\le i-1,\\ -\frac{4i+1}{2i-1}\beta_{i,i}+\frac{2i+2}{2i-1}\beta_{i+1,i}, & l=i,\\ \frac{2i+2}{2i-1}\beta_{i+1,i+1}, & l=i+1.\end{cases}$$

Maintenant, nous déterminons la fonction correspondante

$$F_{20}(r)=F_{20}^1(r)+F_{20}^2(r),$$

avec

$$F_{20}^1(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dF_1(\theta,r)}{dr}.y(\theta,r)d\theta,$$
$$F_{20}^2(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_2(\theta,r)d\theta.$$

Dans les lemmes qui suivent, nous calculons les intégrales $F_{20}^1(r)$ et $F_{20}^2(r)$.

Lemme 3.2.1 *L'intégrale $F^1_{20}(r)$ est un polynôme en r donnée par :*

$$
\begin{aligned}
F^1_{20}(r) &= \sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\Bigg(a_{2s}b_{2k+1}r^{2s+2k+1}(2s\sum_{l=0}^{k+1}\tilde{\gamma}_{k,l}\pi C_{s,l} - \frac{(k+1)\pi\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s}(2s+1)(k+s+2)!})\\
&+ a_{2s}d_{2k+1}r^{2s+2k+3}(2s\sum_{l=0}^{k+2}\tilde{\tilde{\gamma}}_{k,l}\pi C_{i,l} - \frac{3(k+2)\pi\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+1}(2s+1)(k+s+3)!})\\
&+ c_{2s}b_{2k+1}r^{2s+2k+3}((2s+2)\sum_{l=0}^{k+1}\tilde{\gamma}_{k,l}\pi K_{s,l} - \frac{(k+1)(4k+10s+15)\pi\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+1}(2s+1)(2s+3)(k+s+3)!})\\
&+ c_{2s}d_{2k+1}r^{2s+2k+5}((2s+2)\sum_{l=0}^{k+2}\tilde{\tilde{\gamma}}_{k,l}\pi K_{2s,l} - \frac{3(k+2)(4k+14s+21)\pi\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+2}(2s+1)(2s+3)(k+s+4)!})\\
&+ a_{2k+1}d_{2s-2}r^{2s+2k+1}((2k+1)\sum_{l=1}^{s+1}\tilde{\beta}_{s,l}\pi\tilde{C}_{k,l} + \frac{3(2s+1)\pi\alpha_{k+s}}{2^{k+s+1}(2s-1)(k+s+2)!})\\
&+ c_{2k+1}d_{2s-2}r^{2s+2k+3}((2k+3)\sum_{l=1}^{s+1}\tilde{\beta}_{s,l}\pi\tilde{K}_{k,l} + \frac{15(2s+1)\pi\alpha_{k+s}}{2^{k+s+2}(2s-1)(k+s+3)!})\Bigg).
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Preuve. D'après les expressions (3.14) et (3.15) nous obtenons

$$
\begin{aligned}
F^1_{20}(r) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\Bigg(ia_ia_jr^{i+j-1}\int_0^{2\pi}R_i(\theta)J_j(\theta)d\theta + ia_ic_jr^{i+j+1}\int_0^{2\pi}R_i(\theta)\tilde{J}_j(\theta)d\theta\\
&+ (i+2)c_ia_jr^{i+j+1}\int_0^{2\pi}S_i(\theta)J_j(\theta)d\theta + (i+2)c_ic_jr^{i+j+3}\int_0^{2\pi}S_i(\theta)\tilde{J}_j(\theta)d\theta\Bigg)\\
&+ \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\Bigg(a_ib_{2k+1}r^{i+2k+1}(i\sum_{l=0}^{k+1}\tilde{\gamma}_{k,l}\int_0^{2\pi}R_i(\theta)\sin((2l+1)\theta)d\theta + (2k+2)\\
&\times \int_0^{2\pi}T_{2k+1}(\theta)J_i(\theta)d\theta) + c_ib_{2k+1}r^{i+2k+3}((i+2)\sum_{l=0}^{k+1}\tilde{\gamma}_{k,l}\int_0^{2\pi}S_i(\theta)\sin((2l+1)\theta)d\theta\\
&+ (2k+2)\int_0^{2\pi}T_{2k+1}(\theta)\tilde{J}_i(\theta)d\theta) + a_id_{2k+1}r^{i+2k+3}(i\sum_{l=0}^{k+2}\tilde{\tilde{\gamma}}_{k,l}\int_0^{2\pi}R_i(\theta)\sin(2l+1)\theta d\theta\\
&+ (2k+4)\int_0^{2\pi}U_{2k+1}(\theta)J_i(\theta)d\theta) + c_id_{2k+1}r^{i+2k+5}((i+2)\sum_{l=0}^{k+2}\tilde{\tilde{\gamma}}_{k,l}\int_0^{2\pi}S_i(\theta)\\
&\times \sin(2l+1)\theta d\theta + (2k+4)\int_0^{2\pi}U_{2k+1}(\theta)\tilde{J}_i(\theta)d\theta) + \sum_{s=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}((2k+2)\\
&\times (b_{2s+1}b_{2k+1}r^{2s+2k+3}\sum_{l=0}^{s+1}\tilde{\gamma}_{s,l}\int_0^{2\pi}T_{2k+1}(\theta)\sin(2l+1)\theta d\theta + d_{2s+1}b_{2k+1}r^{2s+2k+5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \sum_{l=0}^{s+2} \tilde{\tilde{\gamma}}_{s,l} \int_0^{2\pi} T_{2k+1}(\theta) sin(2l+1)\theta d\theta) + (2k+4) r^{2s+2k+5} (b_{2s+1} d_{2k+1} \sum_{l=0}^{s+1} \tilde{\gamma}_{s,l} \\
&\times \int_0^{2\pi} U_{2k+1}(\theta) \sin(2l+1)\theta d\theta + d_{2s+1} d_{2k+1} r^{2s+2k+7} \sum_{l=0}^{s+2} \tilde{\tilde{\gamma}}_{s,l} \int_0^{2\pi} U_{2k+1}(\theta) \\
&\times sin(2l+1)\theta d\theta)) + \sum_{s=0}^{n} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \Bigg(a_i d_{2k-2} r^{i+2k} (i \sum_{l=1}^{k+1} \tilde{\beta}_{k,l} \int_0^{2\pi} R_i(\theta) \sin(2l\theta) d\theta + (2k+1) \\
&\times (\int_0^{2\pi} T_{2k-2}(\theta) J_i(\theta) d\theta - \frac{2k+2}{2k-1} \int_0^{2\pi} T_{2k}(\theta) J_i(\theta) d\theta)) + c_i d_{2k-2} r^{i+2k+2} \\
&\times ((i+2) \sum_{l=1}^{k+1} \tilde{\beta}_{k,l} \int_0^{2\pi} S_i(\theta) \sin(2l\theta) d\theta + (2k+1)(\int_0^{2\pi} T_{2k-2}(\theta) \tilde{J}_i(\theta) d\theta \\
&- \frac{2k+2}{2k-1} \int_0^{2\pi} T_{2k}(\theta) \tilde{J}_i(\theta) d\theta)) \Bigg) + \sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]} \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \Bigg(r^{2s+2k+2} d_{2s-2} b_{2k+1} ((2k+2) \sum_{l=0}^{s+1} \tilde{\beta}_{s,l} \\
&\times \int_0^{2\pi} T_{2k+1}(\theta) \sin(2l\theta) d\theta + (2s+1)(\sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\gamma}_{k,l} \int_0^{2\pi} T_{2s-2}(\theta) \sin(2l+1)\theta d\theta \\
&- \frac{2s+2}{2s-1} \int_0^{2\pi} T_{2s}(\theta) \sin((2l+1)\theta) d\theta)) + d_{2s-2} d_{2k+1} r^{2s+2k+4} ((2k+4) \sum_{l=0}^{s+1} \tilde{\beta}_{s,l} \\
&\times \int_0^{2\pi} U_{2k+1}(\theta) \sin(2l\theta) d\theta + (2s+1)(\sum_{l=0}^{k+2} \tilde{\tilde{\gamma}}_{k,l} \int_0^{2\pi} T_{2s-2}(\theta) \sin(2l+1)\theta d\theta \\
&- \frac{2s+2}{2s-1} \int_0^{2\pi} T_{2s}(\theta) \sin(2l+1)\theta) d\theta)) \Bigg) + \sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} r^{2s+2k+1} (2s+1) d_{2s-2} d_{2k-2} \\
&\times \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\beta}_{k,l} \left(\int_0^{2\pi} T_{2s-2}(\theta) \sin(2l\theta) d\theta - \frac{2s+2}{2s-1} \int_0^{2\pi} T_{2s}(\theta) \sin(2l\theta) d\theta \right).
\end{aligned}
$$

Pour simplifier l'expression du polynôme $F_{20}^1(r)$, nous utilisons les intégrales de l'appendice A. On a

- $\int_0^{2\pi} R_i(\theta) J_j(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} R_i(\theta) \tilde{J}_j(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} S_i(\theta) J_j(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} S_i(\theta) \tilde{J}_j(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} T_i(\theta) \sin(2l+1)\theta d\theta = \int_0^{2\pi} U_i(\theta) \sin(2l+1)\theta d\theta = \int_0^{2\pi} T_i(\theta) \sin(2l\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} U_i(\theta) \sin(2l\theta) d\theta = 0.$

- $\int_0^{2\pi} T_i(\theta) J_j(\theta) d\theta =$

$$
\begin{cases}
\frac{1}{2s+1} \tilde{I}_{2k}(2\pi), & \text{if i=2k, j=2s,} \\
\frac{1}{2s+2} (\tilde{I}_{2k}(2\pi) - \tilde{I}_{2k+2s+2}(2\pi)), & \text{if i=2k, j=2s+1,} \\
-\frac{1}{2s+1} \tilde{I}_{2k+2s+2}(2\pi), & \text{if i=2k+1, j=2s,} \\
0, & \text{if i=2k+1, j=2s+1.}
\end{cases}
$$

- $\int_0^{2\pi} T_i(\theta)\tilde{J}_j(\theta)d\theta =$

$$\begin{cases} \frac{2}{(2s+1)(2s+3)}\tilde{I}_{2k}(2\pi), & \text{if i=2k, j=2s,} \\ \frac{2}{(2s+2)(2s+4)}\tilde{I}_{2k}(2\pi) - \frac{2}{(2s+2)}\tilde{I}_{2k+2s+2}(2\pi) & \\ +\frac{2}{(2s+4)}\tilde{I}_{2k+2s+4}(2\pi), & \text{if i=2k, j=2s+1,} \\ -\frac{2}{(2s+1)}\tilde{I}_{2k+2s+2}(2\pi) + \frac{2}{(2s+3)}\tilde{I}_{2k+2s+4}(2\pi), & \text{if i=2k+1, j=2s,} \\ 0, & \text{if i=2k+1, j=2s+1.} \end{cases}$$

- $\int_0^{2\pi} U_{2k+1}(\theta)J_i(\theta)d\theta = \begin{cases} -\frac{1}{2s+2}\tilde{\tilde{I}}_{2k+2s+2}(2\pi), & \text{i=2s,} \\ 0, & \text{if i=2s+1.} \end{cases}$

- $\int_0^{2\pi} U_{2k+1}(\theta)\tilde{J}_i(\theta)d\theta =$

$$\begin{cases} -\frac{2}{(2s+1)}\tilde{\tilde{I}}_{2k+2s+2}(2\pi) + \frac{2}{(2s+3)}\tilde{\tilde{I}}_{2k+2s+4}(2\pi), & \text{if i=2s,} \\ 0, & \text{if i=2s+1.} \end{cases}$$

- $\int_0^{2\pi} R_i(\theta)\sin(2l+1)\theta d\theta = \begin{cases} \pi C_{s,l}, & i = 2s, \\ 0, & i = 2s+1. \end{cases}$

- $\int_0^{2\pi} S_i(\theta)\sin(2l+1)\theta d\theta = \begin{cases} \pi K_{s,l}, & i = 2s, \\ 0, & i = 2s+1. \end{cases}$

- $\int_0^{2\pi} R_i(\theta)\sin(2l\theta)d\theta = \begin{cases} \pi\tilde{C}_{s,l}, & i = 2s+1, \\ 0, & i = 2s. \end{cases}$

- $\int_0^{2\pi} S_i(\theta)\sin(2l\theta)d\theta = \begin{cases} \pi\tilde{K}_{s,l}, & i = 2s+1, \\ 0, & i = 2s. \end{cases}$

Lemme 3.2.2 *L'intégrale $F_{20}^2(r)$ est un polynôme en r donnée par :*

$$\begin{aligned} F_{20}^2(r) &= \sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\pi\alpha_s}{2^s(s+1)!}(q_{2s}r^{2s+1} + \frac{3}{2(s+2)}v_{2s}r^{2s+3}) - \sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(a_{2s}b_{2k+1} \\ &\times \; r^{2s+2k+1}\frac{\pi\alpha_{s+k+1}}{2^{s+k}(s+k+2)!} + a_{2s}d_{2k+1}r^{2s+2k+3}\frac{3\pi\alpha_{s+k+1}}{2^{s+k+1}(s+k+3)!} \\ &+ \; c_{2s}b_{2k+1}r^{2s+2k+3}\frac{3\pi\alpha_{s+k+1}}{2^{s+k+1}(s+k+3)!} + c_{2s}d_{2k+1}r^{2s+2k+5}\frac{15\pi}{2^{s+k+2}} \\ &\times \; \frac{\alpha_{s+k+1}}{(s+k+4)!} - a_{2k+1}d_{2s-2}r^{2s+2k+1}\frac{3\pi(k+1)\alpha_{s+k}}{2^{s+k-1}(2s-1)(s+k+2)!} \\ &- \; c_{2k+1}d_{2s-2}r^{2s+2k+3}\frac{3\pi(3k-2s+4)\alpha_{s+k}}{2^{s+k}(2s-1)(s+k+3)!}\Bigg). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Preuve. En remplaçant l'expression (3.13) dans (3.12), nous avons

$$
\begin{aligned}
F_2(r,\theta) &= \sum_{i=0}^{n}\big(p_i r^i R_i(\theta)+q_i r^{i+1}T_i(\theta)+s_i r^{i+2}S_i(\theta)+v_i r^{i+3}U_{2i+1}(\theta)\big)\\
&- \frac{1}{r}\left(\sum_{i=0}^{n}(a_i r^i R_i(\theta)+c_i r^{i+2}S_i(\theta))+\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(b_{2k+1}r^{2k+2}T_{2k+1}(\theta)\right.\\
&+ d_{2k+1}r^{2k+4}U_{2k+1}(\theta))+\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}d_{2k-2}r^{2i+1}(T_{2k-2}(\theta)-\frac{2k+2}{2k-1}T_{2k}(\theta))\\
&\times \left(\sum_{i=0}^{n}(a_i r^i\cos^{i+1}(\theta)+c_i r^{i+2}T_{i+1}(\theta))+\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(b_{2k+1}r^{2k+2}R_{2k+2}(\theta)\right.\\
&+ \left. d_{2k+1}r^{2k+4}S_{2k+2}(\theta))+\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}d_{2k-2}r^{2k+1}(R_{2k-1}-\frac{2k+2}{2k-1}R_{2k+1}(\theta))\right).
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
F_{20}^2(r) &= \sum_{i=0}^{n}\left(p_i r^i\int_0^{2\pi}R_i(\theta)d\theta+q_i r^{i+1}\int_0^{2\pi}T_i(\theta)d\theta+s_i r^{i+2}\int_0^{2\pi}S_i(\theta)d\theta+v_i r^{i+3}\right.\\
&\times \left.\int_0^{2\pi}U_i(\theta)d\theta\right)-\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left(a_i a_j r^{i+j-1}\int_0^{2\pi}R_i(\theta)\cos^{j+1}\theta d\theta+a_i c_j r^{i+j+1}\right.\\
&\times \int_0^{2\pi}R_i(\theta)T_{j+1}(\theta)d\theta+c_i a_j r^{i+j+1}\int_0^{2\pi}S_i(\theta)\cos^{j+1}\theta d\theta+c_i c_j r^{i+j+3}\\
&\times \left.\int_0^{2\pi}S_i(\theta)T_{j+1}(\theta)d\theta\right)-\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\left(a_i b_{2k+1}r^{i+2k+1}(\int_0^{2\pi}T_{2k+1}(\theta)\cos^{i+1}\theta d\theta\right.\\
&+ \int_0^{2\pi}R_{2k+2}(\theta)R_i(\theta)d\theta)+a_i d_{2k+1}r^{i+2k+3}(\int_0^{2\pi}U_{2k+1}(\theta)\cos^{i+1}\theta d\theta+\int_0^{2\pi}S_{2k+2}(\theta)\\
&\times R_i(\theta)d\theta)+c_i b_{2k+1}r^{i+2k+3}(\int_0^{2\pi}T_{2k+1}(\theta)T_i(\theta)d\theta+\int_0^{2\pi}R_{2k+2}(\theta)S_i(\theta)d\theta)\\
&+ \left.c_i d_{2k+1}r^{i+2k+5}(\int_0^{2\pi}U_{2k+1}(\theta)T_i(\theta)d\theta+\int_0^{2\pi}S_{2k+2}(\theta)S_i(\theta)d\theta)\right)-\sum_{i=0}^{n}\sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]}(a_i d_{2s-2}\\
&\times r^{i+2s}(\int_0^{2\pi}R_i(\theta)R_{2s-1}(\theta)d\theta+\int_0^{2\pi}T_{2s-2}(\theta)\cos^{i+1}\theta d\theta-\frac{2s+2}{2s-1}(\int_0^{2\pi}R_i(\theta)\\
&\times R_{2s+1}(\theta)d\theta+\int_0^{2\pi}T_{2s}(\theta)\cos^{i+1}\theta d\theta))+c_i d_{2s-2}r^{i+2s+2}(\int_0^{2\pi}S_i(\theta)R_{2s-1}(\theta)d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ & \int_0^{2\pi} T_{2s-2}(\theta)T_i(\theta)d\theta - \frac{2s+2}{2s-1}\Big(\int_0^{2\pi} S_i(\theta)R_{2s+1}(\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} T_{2s}(\theta)T_i(\theta)d\theta)\Big) \\
- & \sum_{s=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\Big(b_{2s+1}b_{2k+1}r^{2s+2k+3}\int_0^{2\pi} T_{2s+1}(\theta)R_{2k+2}(\theta)d\theta + d_{2s+1}b_{2k+1}r^{2s+2k+5} \\
\times & \int_0^{2\pi} U_{2s+1}(\theta)R_{2k+2}(\theta)d\theta + b_{2s+1}d_{2k+1}r^{2s+2k+5}\int_0^{2\pi} T_{2s+1}(\theta)S_{2k+2}(\theta)d\theta \\
+ & d_{2s+1,1}d_{2k+1}r^{2s+2k+7}\int_0^{2\pi} U_{2s+1}(\theta)S_{2k+2}(\theta)d\theta\Big) - \sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(d_{2s-2}b_{2k+1} \\
\times & r^{2s+2k+2}\Big(\int_0^{2\pi} T_{2s-2}(\theta)R_{2k+2}(\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} R_{2s-1}(\theta)T_{2k+1}(\theta)d\theta - \frac{2s+2}{2s-1} \\
\times & \Big(\int_0^{2\pi} T_{2s}(\theta)R_{2k+2}(\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} R_{2s+1}(\theta)T_{2k+1}(\theta)d\theta)) + d_{2s-2}d_{2k+1}r^{2s+2k+4} \\
\times & \Big(\int_0^{2\pi} T_{2s-2}(\theta)S_{2k+2}(\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} R_{2s-1}(\theta)U_{2k+1}(\theta)d\theta - \frac{2s+2}{2s-1}\Big(\int_0^{2\pi} T_{2s}(\theta) \\
\times & S_{2k+2}(\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} R_{2s+1}(\theta)U_{2k+1}(\theta)d\theta))\Big) - \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} d_{2s-2}d_{2k-2}r^{2s+2k+3} \\
\times & \Big(\int_0^{2\pi} T_{2s-2}(\theta)R_{2k-1}(\theta)d\theta - \frac{2s+2}{2s-1}\Big(\int_0^{2\pi} T_{2s-2}(\theta)R_{2k+1}(\theta)d\theta \\
+ & \int_0^{2\pi} T_{2s}(\theta)R_{2k-1}(\theta)d\theta) + \frac{(2s+2)^2}{(2s-1)^2}\int_0^{2\pi} T_{2s}(\theta)R_{2k+1}(\theta)d\theta\Big).
\end{aligned}
$$

Pour une expression explicite du polynôme $F_{20}^2(r)$, en utilisant les intégrales de l'appendice A nous avons

- $\int_0^{2\pi} R_i(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} S_i(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^i\theta R_j(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^i\theta S_j(\theta)d\theta =$

  $\int_0^{2\pi} R_i(\theta)T_j(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} S_i(\theta)T_j(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} R_i(\theta)U_j(\theta)d\theta =$

  $\int_0^{2\pi} S_i(\theta)U_j(\theta)d\theta = 0.$

- $\int_0^{2\pi} T_i(\theta)d\theta = \begin{cases} 0, & \text{if } i = 2k+1, \\ \tilde{I}_{2k}(2\pi) = \frac{\pi\alpha_k}{2^k(k+1)!}, & \text{if } i = 2k. \end{cases}$

- $\int_0^{2\pi} \cos^{i+1}\theta T_{2k+1}(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} R_{2k+2}(\theta)R_i(\theta)d\theta =$

  $\begin{cases} 0, & \text{if } i = 2s+1, \\ \tilde{I}_{2k+2s+2}(2\pi) = \frac{\pi\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+1}(k+s+2)!}, & \text{if } i = 2s. \end{cases}$

- $\int_0^{2\pi} R_{2k+2}(\theta)S_i(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} T_{2k+1}(\theta)T_{i+1}(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^{i+1}\theta U_{2k+1}(\theta)d\theta =$

  $\int_0^{2\pi} S_{2k+2}(\theta)R_i(\theta)d\theta$

  $$= \begin{cases} 0, & \text{if } i = 2s+1, \\ \tilde{\tilde{I}}_{2k+2s+2}(2\pi) = \frac{3\pi\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+2}(k+s+3)!}, & \text{if } i = 2s. \end{cases}$$

- $\int_0^{2\pi} U_{2k+1}(\theta)T_i(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} S_{2k+1}(\theta)S_i(\theta)d\theta =$

  $$\begin{cases} 0, & \text{if } i = 2s, \\ \tilde{\tilde{I}}_{2k+2s+2}(2\pi) - \tilde{\tilde{I}}_{2k+2s+4}(2\pi) = \frac{15\pi\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+3}(k+s+4)!}, & \text{if } i = 2s+1. \end{cases}$$

D'après les lemmes 3.2.1 et 3.2.2, nous avons

$$\begin{aligned}
F_{20}(r) &= F_{20}^1(r) + F_{20}^2(r) \\
&= \sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\alpha_s}{2^{s+1}(s+1)!}\left(q_{2s}r^{2s+1} + \frac{3}{2(s+2)}v_{2s}r^{2s+3}\right) + \sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(a_{2s}b_{2k+1} \\
&\times\ r^{2s+2k+1}(s\sum_{l=0}^{k+1}\tilde{\gamma}_{k,l}C_{s,l} - \frac{(2s+k+2)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+1}(2s+1)(k+s+2)!}) + c_{2s}b_{2k+1}r^{2s+2k+3} \\
&\times\ ((s+1)\sum_{l=0}^{k+1}\tilde{\gamma}_{k,l}K_{s,l} - \frac{(12s^2+4k^2+34s+10sk+19k+24)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+2}(2s+1)(2s+3)(k+s+3)!}) \\
&+\ a_{2s}d_{2k+1}r^{2s+2k+3}(s\sum_{l=0}^{k+2}\tilde{\tilde{\gamma}}_{k,l}C_{s,l} - \frac{3(2s+k+3)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+2}(2s+1)(k+s+3)!}) + c_{2s}d_{2k+1} \\
&\times\ r^{2s+2k+5}((s+1)\sum_{l=0}^{k+2}\tilde{\tilde{\gamma}}_{k,l}K_{s,l} - \frac{3(20s^2+4k^2+68s+14sk+29k+57)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+3}(2s+1)(2s+3)(k+s+4)!}) \\
&+\ a_{2k+1}d_{2s-2}r^{2s+2k+1}(\frac{(2s+1)}{2}\sum_{l=1}^{s+1}\tilde{\beta}_{s,l}\tilde{C}_{k,l} + \frac{3(4k+2s+5)\alpha_{k+s}}{2^{k+s+2}(2s-1)(k+s+2)!}) \\
&+\ c_{2k+1}d_{2s-2}r^{2s+2k+3}(\frac{(2s+3)}{2}\sum_{l=1}^{s+1}\tilde{\beta}_{s,l}\tilde{K}_{k,l} - \frac{3(12k+2s+21)\alpha_{k+s}}{2^{k+s+3}(2s-1)(k+s+3)!})\Bigg).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Pour trouver les racines positives réelles de $F_{20}(r)$, nous devons trouver les racines d'un polynôme dans r^2 de degré égal au $[\frac{n}{2}] + [\frac{n-1}{2}] + 2$. Puisque $\left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + 2$ prend la valeur $\left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] + 2$ si n est impair et la valeur $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n-2}{2}\right] + 2$ si n est pair, soit $n+1$ dans les deux cas. Nous concluons que $F_{20}(r)$ a au plus $n+1$ racines positives simples.

Exemple 3.2.2 *Dans cette section, nous montrons que la limite supérieure $\tilde{H}_2(n)$ est atteinte dans le cas où $1 \leq n \leq 5$. Les calculs ont été vérifiés à l'aide de Maple. Nous notons $F_{20}^n(r)$ la fonction $F_{20}(r)/r$ correspondant, un calcul adéquat permet d'obtenir*

- $F_{20}^1(r) = \frac{1}{2}q_0 - \frac{1}{2}a_0b_1 + (\frac{3}{8}v_0 - \frac{1}{8}c_0b_1 - \frac{3}{8}d_1a_0)r^2 - \frac{3}{16}d_1c_0r^4.$

- $F_{20}^2(r) = \frac{1}{2}q_0 - \frac{1}{2}a_0b_1 + (\frac{3}{8}v_0 - \frac{1}{8}c_0b_1 - \frac{3}{8}d_1a_0 - \frac{1}{8}b_1a_2 + \frac{3}{8}d_0a_1 + \frac{1}{8}q_2)r^2 + (-\frac{3}{16}d_1c_0 - \frac{1}{48}b_1c_2 + \frac{1}{16}d_0c_1 + \frac{1}{16}v_2 - \frac{1}{16}d_1a_2)r^4 - \frac{3}{128}d_1c_2r^6.$

- $F_{20}^3(r) = \frac{1}{2}q_0 - \frac{1}{2}a_0b_1 + (\frac{3}{8}v_0 - \frac{1}{8}c_0b_1 - \frac{3}{8}d_1a_0 - \frac{1}{8}b_1a_2 + \frac{3}{8}d_0a_1 + \frac{1}{8}q_2 - \frac{3}{8}a_0b_3)r^2 + (-\frac{3}{16}d_1c_0 - \frac{1}{48}b_1c_2 + \frac{1}{16}d_0c_1 + \frac{1}{16}v_2 - \frac{1}{16}d_1a_2 - \frac{7}{48}c_0b_3 + \frac{3}{16}d_0a_3 - \frac{3}{16}a_0d_3 - \frac{5}{48}b_3a_2)r^4 + (-\frac{3}{128}d_1c_2 - \frac{3}{128}b_3c_2 - \frac{5}{128}d_3a_2 - \frac{13}{128}d_3c_0 + \frac{3}{128}d_0c_3)r^6 - \frac{19}{1280}d_3c_2r^8.$

- $F_{10}^4(r) = \frac{1}{2}q_0 - \frac{1}{2}a_0b_1 + (\frac{3}{8}v_0 - \frac{1}{8}c_0b_1 - \frac{3}{8}d_1a_0 - \frac{1}{8}b_1a_2 + \frac{3}{8}d_0a_1 + \frac{1}{8}q_2 - \frac{3}{8}a_0b_3)r^2 + (\frac{1}{16}q_4 - \frac{1}{16}a_4b_1 - \frac{3}{16}d_1c_0 - \frac{1}{48}b_1c_2 + \frac{1}{16}d_0c_1 + \frac{1}{16}v_2 - \frac{1}{16}d_1a_2 - \frac{7}{48}c_0b_3 + \frac{3}{16}d_0a_3 - \frac{3}{16}a_0d_3 - \frac{5}{48}b_3a_2 + \frac{1}{16}d_2a_1)r^4 + (\frac{3}{128}q_4 + \frac{5}{128}a_3d_2 - \frac{1}{128}c_4b_1 - \frac{3}{128}a_4d_1 - \frac{7}{128}a_4b_3 + \frac{1}{128}d_2c_1 - \frac{3}{128}d_1c_2 - \frac{3}{128}b_3c_2 - \frac{5}{128}d_3a_2 - \frac{13}{128}d_3c_0 + \frac{3}{128}d_0c_3)r^6 + (-\frac{19}{1280}d_3c_2 - \frac{9}{1280}c_4d_1 - \frac{11}{1280}c_4b_3 + \frac{1}{256}d_2c_3 - \frac{21}{1280}a_4d_3)r^8 - \frac{5}{1024}c_4d_3r^{10}.$

- $F_{20}^5(r) = \frac{1}{2}q_0 - \frac{1}{2}a_0b_1 + (\frac{3}{8}v_0 - \frac{1}{8}c_0b_1 - \frac{3}{8}d_1a_0 - \frac{1}{8}b_1a_2 + \frac{3}{8}d_0a_1 + \frac{1}{8}q_2 - \frac{3}{8}a_0b_3)r^2 + (\frac{1}{16}q_4 - \frac{1}{16}a_4b_1 - \frac{3}{16}d_1c_0 - \frac{1}{48}b_1c_2 + \frac{1}{16}d_0c_1 + \frac{1}{16}v_2 - \frac{1}{16}d_1a_2 - \frac{7}{48}c_0b_3 + \frac{3}{16}d_0a_3 - \frac{3}{16}a_0d_3 - \frac{5}{48}b_3a_2 + \frac{1}{16}d_2a_1 - \frac{5}{16}a_0b_5)r^4 + (\frac{3}{128}q_4 + \frac{5}{128}a_3d_2 - \frac{1}{128}c_4b_1 - \frac{3}{128}a_4d_1 - \frac{7}{128}a_4b_3 + \frac{1}{128}d_2c_1 - \frac{3}{128}d_1c_2 - \frac{3}{128}b_3c_2 - \frac{5}{128}d_3a_2 - \frac{13}{128}d_3c_0 + \frac{3}{128}d_0c_3 + \frac{15}{128}d_0a_5 - \frac{35}{384}b_5a_2 - \frac{15}{128}a_4d_5 - \frac{55}{384}c_0b_5)r^6 + (-\frac{19}{1280}d_3c_2 - \frac{9}{1280}c_4d_1 - \frac{11}{1280}c_4b_3 + \frac{1}{256}d_2c_3 - \frac{21}{1280}a_4d_3 - \frac{91}{1024}b_5c_2 - \frac{17}{256}c_0d_5 - \frac{17}{256}d_5a_2 + \frac{7}{256}a_5d_2 - \frac{63}{1280}a_4b_5)r^8 + (\frac{7}{3072}d_2c_5 - \frac{9}{1024}c_4b_5 - \frac{161}{15360}c_2d_5 - \frac{63}{5120}a_4d_5 - \frac{5}{1024}c_4d_3)r^{10} - \frac{261}{71680}c_4d_5r^{12}.$

Si nous fixons $q_0 = 1, q_2 = -\frac{2}{3}, b_1 = -1, b_3 = \frac{2}{3}, a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -2, a_3 = -\frac{419}{342}, c_0 = 2, c_1 = 1, c_2 = -\frac{16}{3}, c_3 = \frac{244}{57}, d_0 = -\frac{8}{3}, d_1 = -\frac{4}{3}, d_2 = 1, d_3 = \frac{10}{19}, v_0 = -6$ *et* $v_2 = \frac{136}{9}$*. Nous avons*

$F_{20}^1(r) = \frac{1}{2}(1 - r^2)(2 - r^2)$, *qui a exactement deux racines positives.*
$F_{20}^2(r) = \frac{1}{6}(1 - r^2)(2 - r^2)(3 - r^2)$, *qui a exactement trois racines positives.*
$F_{20}^3(r) = \frac{1}{24}(1 - r^2)(2 - r^2)(3 - r^2)(4 - r^2)$, *qui a exactement quatre racines positives.*

D'autre part, si nous choisissons $q_0 = 1, q_2 = -\frac{34}{5}, q_4 = \frac{1537022}{118125}, b_1 = -1, b_3 = \frac{2}{3}, a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -2, a_3 = -\frac{419}{342}, a_4 = -\frac{749522}{118125}, c_0 = 2, c_1 = 1, c_2 = -\frac{16}{3}, c_3 = \frac{244}{57}, c_4 = \frac{1216}{375}, d_0 = -\frac{8}{3}, d_1 = -\frac{4}{3}, d_2 = 1, d_3 = \frac{10}{19}, v_0 = -6$ $v_2 = \frac{136}{9}$ *et* $v_4 = \frac{534345857}{40398750}$*. Nous avons*

$F_{20}^4(r) = \frac{1}{120}(1 - r^2)(2 - r^2)(3 - r^2)(4 - r^2)(5 - r^2)$, *qui a exactement cinq racines positives.*

Enfin si nous choisissons $q_0 = 1, q_2 = -\frac{18}{5}, q_4 = \frac{304}{45}, b_1 = -1, b_3 = \frac{2}{3}, b_5 = 2, a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -2, a_3 = -\frac{419}{342}, a_4 = 16, a_5 = \frac{96528128}{520695}, c_0 = 2, c_1 = 1, c_2 = -\frac{16}{3}, c_3 = \frac{244}{57}, c_4 = \frac{128}{9}, c_5 = \frac{285472}{2565}, d_0 = -\frac{8}{3}, d_1 = -\frac{4}{3}, d_2 = 1, d_3 = \frac{10}{19}, d_5 = -\frac{7}{261}, v_0 = -6$ $v_2 = \frac{136}{9}$ *et* $v_4 = \frac{1534140539}{624834}$. *Nous avons*
$F_{20}^5(r) = \frac{1}{720}(1-r^2)(2-r^2)(3-r^2)(4-r^2)(5-r^2)(6-r^2)$, *qui a exactement six racines positives.*

Chapitre 4

Nombre maximal de cycles limites pour les systèmes différentiels polynomiaux généralisés de Kukles

Sommaire

4.1 Introduction et résultat principaux

En 2011, Llibre et Mereu [30] ont étudié par la méthode de la moyennisation le nombre des cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$, du système différentiel polynômial de Kukles de type :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0 y^3, \end{aligned} \tag{4.1}$$

où les polynômes $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ sont de degrés n_1, n_2 et n_3 respectivement, $d_0 \neq 0$ est un nombre réel. Ils ont prouvé que le système (4.1) peut avoir $\lambda_1^* = \max \left\{ [\frac{n_2}{2}], 1 \right\}$ cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre et $\lambda_2^* = \max \left\{ \left[\frac{n_1}{2}\right] + \left[\frac{n_2-1}{2}\right], \left[\frac{n_1+1}{2}\right], \left[\frac{n_3+3}{2}\right], \left[\frac{n_2+1}{2}\right] + \left[\frac{n_3}{2}\right], \left[\frac{n_2}{2}\right], \left[\frac{n_1-1}{2}\right] + \left[\frac{n_2}{2}\right], \left[\frac{n_3+1}{2}\right] + \left[\frac{n_2}{2}\right], 1 \right\}$ cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au nombre maximum des cycles limites d'une classe de systèmes différentiels de Kukles plus généralisée que (4.1) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + l(x), \\ \dot{y} &= x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0 y^3, \end{aligned} \tag{4.2}$$

où $l(x) = \varepsilon l^1(x) + \varepsilon^2 l^2(x)$, $f(x) = \varepsilon f^1(x) + \varepsilon^2 f^2(x)$, $g(x) = \varepsilon g^1(x) + \varepsilon^2 g^2(x)$, $h(x) = \varepsilon h^1(x) + \varepsilon^2 h^2(x)$ et $d_0 = \varepsilon d_0^1 + \varepsilon^2 d_0^2$. Pour chaque $k = 1, 2$, $l^k(x)$, $f^k(x)$, $g^k(x)$ et $h^k(x)$ sont de degrés m, n_1, n_2 et n_3 respectivement. $d_0^k \neq 0$ est un nombre réel et ε est un petit paramètre. Nous montrons aussi dans ce chapitre que le résultat obtenu dans notre travail [41] est une meilleure estimation que le résultat de [30]. A la fin du chapitre nous donnons quelques exemples de comparaison entre les deux résultats. Nos résultats sont les suivants.

Théorème 4.1.1 *Pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du systeme différentiel (4.2) qui bifurquent d'un centre linéaire $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre est*

$$\lambda_1 = \max\left\{[\frac{m-1}{2}], [\frac{n_2}{2}], 1\right\}.$$

Théorème 4.1.2 *Pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du systeme différentiel (4.2) qui bifurquent d'un centre linéaire $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre est*

$$\begin{aligned}\lambda_2 \;&= \max\left\{\left[\tfrac{n_1}{2}\right] + \left[\tfrac{n_2-1}{2}\right], \left[\tfrac{n_1}{2}\right] + \left[\tfrac{m}{2}\right] - 1, \left[\tfrac{n_1+1}{2}\right], \left[\tfrac{n_3+3}{2}\right], \left[\tfrac{n_3}{2}\right] + \left[\tfrac{m}{2}\right]\right.\\ &\left.\left[\tfrac{n_2+1}{2}\right] + \left[\tfrac{n_3}{2}\right], \left[\tfrac{n_2}{2}\right], \left[\tfrac{m-1}{2}\right], \left[\tfrac{n_1-1}{2}\right] + \mu, \left[\tfrac{n_3+1}{2}\right] + \mu, 1\right\},\end{aligned}$$

où $\mu = \min\left\{\left[\tfrac{m-1}{2}\right], \left[\tfrac{n_2}{2}\right]\right\}$.

4.2 Preuves des résultats

4.2.1 Preuve du théorème 4.1.1

Nous allons appliquer la méthode de moyennisation du premier ordre. Pour cela nous écrivons le système (4.2) en coordonnées polaires (r, θ) où $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Posons

$$f^1(x) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i x^i, \quad g^1(x) = \sum_{i=0}^{n_2} b_i x^i, \quad h^1(x) = \sum_{i=0}^{n_3} c_i x^i, \quad l^1(x) = \sum_{i=0}^{m} e_i x^i. \tag{4.3}$$

Le système (4.2) s'écrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon\left(\cos\theta\sum_{i=0}^{m} e_i r^i \cos^i\theta - \sin\theta P(\theta, r)\right), \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\varepsilon}{r}\left(\sin\theta\sum_{i=0}^{m} e_i r^i \cos^i\theta + \cos\theta P(\theta, r)\right), \end{cases} \tag{4.4}$$

où

$$P(\theta, r) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i\theta + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+1}\cos^i\theta\sin\theta + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2}\cos^i\theta\sin^2\theta + d_0^1 r^3\sin^3\theta.$$

Prenons θ comme une nouvelle variable indépendante, le système (4.4) devient

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon\left(\cos\theta\sum_{i=0}^{m}e_ir^i\cos^i\theta-\sin\theta P(\theta,r)\right)+O(\varepsilon^2)\\ &= \varepsilon F_1(\theta,r)+O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Calculons maintenant $F_{10}(r)$

$$\begin{aligned}F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\sum_{i=0}^{m}e_ir^i\cos^i\theta-\sin\theta P(\theta,r)\right)d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{m}e_ir^i\int_0^{2\pi}\cos^{i+1}\theta d\theta-\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{n_1}a_ir^i\int_0^{2\pi}\cos^i\theta\sin\theta d\theta-\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{n_2}b_ir^{i+1}\\ &\quad\times\int_0^{2\pi}\cos^i\theta\sin^2\theta d\theta-\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{n_3}c_ir^{i+2}\int_0^{2\pi}\cos^i\theta\sin^3\theta d\theta-\frac{1}{2\pi}d_0^1r^3\int_0^{2\pi}\sin^4\theta d\theta.\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant les expressions des intégrales en annexe A (notez que $\alpha_{k+1}=(2k+1)\alpha_k$), nous obtenons

$$\begin{aligned}F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}e_{2i+1}r^{2i+1}\int_0^{2\pi}\cos^{2i+2}\theta d\theta-\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2}{2}\right]}b_{2i}r^{2i+1}\int_0^{2\pi}\cos^{2i}\theta\sin^2\theta d\theta\\ &\quad-\frac{3}{8}d_0^1r^3\\ &= r\sum_{i=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\frac{\alpha_{i+1}}{2^{i+1}(i+1)!}e_{2i+1}r^{2i}-r\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2}{2}\right]}\frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!}b_{2i}r^{2i}-\frac{3}{8}d_0^1r^3.\end{aligned}$$

Donc

$$F_{10}(r)=r\sum_{i=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\frac{(2i+1)\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!}e_{2i+1}r^{2i}-r\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2}{2}\right]}\frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!}b_{2i}r^{2i}-\frac{3}{8}d_0^1r^3. \tag{4.5}$$

Alors le polynomiale $F_{10}(r)$ peut avoir au plus $\lambda_1=\max\left\{[\frac{m-1}{2}],[\frac{n_2}{2}],1\right\}$ racines positives. Par conséquent, le système différentiel (4.2) peut avoir au plus $\lambda_1=\max\left\{[\frac{m-1}{2}],[\frac{n_2}{2}],1\right\}$ cycles limites.

4.2.2 Preuve du théorème 4.1.2 et certains lemmes

Pour démontrer le théorème 4.1.2, nous allons appliquer la méthode de moyennisation du seconde ordre au système (4.2). Si l'on écrit $f^1(x)$, $g^1(x)$, $h^1(x)$ et $l^1(x)$ comme en (4.3), et

$$f^2(x)=\sum_{i=0}^{n_1}p_ix^i,\quad g^2(x)=\sum_{i=0}^{n_2}q_ix^i,\quad h^2(x)=\sum_{i=0}^{n_3}s_ix^i,\quad l^2(x)=\sum_{i=0}^{m}v_ix^i.$$

Le systeme (4.2) s'écrit en coordonnées polaires (r, θ), $r > 0$ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{r} & = \varepsilon(\cos\theta\sum_{i=0}^{m} e_i r^i \cos^i\theta - \sin\theta P(\theta, r)) + \varepsilon^2 \left(\cos\theta\sum_{i=0}^{m} v_i r^i \cos^i\theta - \sin\theta Q(\theta, r)\right), \\ \dot{\theta} & = 1 - \frac{\varepsilon}{r}\left(\cos\theta P(\theta, r) + \sin\theta\sum_{i=0}^{m} e_i r^i \cos^i\theta\right) - \frac{\varepsilon^2}{r}\left(\cos\theta Q(\theta, r) + \sin\theta\right. \\ & \left.\times\sum_{i=0}^{m} v_i r^i \cos^i\theta\right), \end{cases} \tag{4.6}$$

où

$$Q(\theta, r) = \sum_{i=0}^{n_1} p_i r^i \cos^i\theta + \sum_{i=0}^{n_2} q_i r^{i+1} \cos^i\theta \sin\theta + \sum_{i=0}^{n_3} s_i r^{i+2} \cos^i\theta \sin^2\theta + d_0^2 r^3 \sin^3\theta.$$

Considérons θ comme une nouvelle variable indépendante, alors le système (4.6) devient

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon\left(\cos\theta e_i r^i \cos^i\theta - \sin\theta P(\theta, r)\right) + \varepsilon^2 \left(\cos\theta\sum_{i=0}^{m} v_i r^i \cos^i\theta - \sin\theta Q(\theta, r)\right. \\ &\quad + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\left(\left(\sum_{i=0}^{m} e_i r^i \cos^i\theta\right)^2 - P^2(\theta, r)\right) + P(\theta, r)\frac{\left(2\cos^2\theta - 1\right)}{r} \\ &\quad \left.\times\sum_{i=0}^{m} e_i r^i \cos^i\theta\right) + O(\varepsilon^3) \\ &= \varepsilon F_1(\theta, r) + \varepsilon^2 F_2(\theta, r) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Afin d'appliquer la théorie de moyennisation du second ordre, F_{10} doit être identiquement nulle. On a $F_{10} \equiv 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} b_{2i} = (2i + 1)\, e_{2i+1}, & \text{if } 0 \leq i \leq \mu \text{ and } i \neq 1, \\ b_{2i} = e_{2i+1} = 0, & \text{if } \mu + 1 \leq i \leq \lambda_1 \text{ and } i \neq 1, \\ b_2 = 3e_3 - 3d_0^1, & \text{if } i = 1. \end{cases}$$

où $\mu = \min\left\{\left[\frac{m-1}{2}\right], \left[\frac{n_2}{2}\right]\right\}$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dF_1(\theta, r)}{dr} &= \sum_{i=0}^{m} i e_i r^{i-1} \cos^{i+1}\theta - \sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1} \cos^i\theta \sin\theta - \sum_{i=0}^{n_2} (i + 1)\, b_i r^i \\ &\quad \times \cos^i\theta \sin^2\theta - \sum_{i=0}^{n_3} (i + 2)\, c_i r^{i+1} \cos^i\theta \sin^3\theta - 3d_0^1 r^2 \sin^4\theta \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} 2ie_{2i}r^{2i-1}\cos^{2i+1}\theta + 3e_3r^2\cos^4\theta - \sum_{i=0}^{n_1} ia_ir^{i-1}\cos^i\theta\sin\theta - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]}(2i+2)$$
$$\times b_{2i+1}r^{2i+1}\cos^{2i+1}\theta\sin^2\theta - 3b_2r^2\cos^2\theta\sin^2\theta - \sum_{i=0}^{n_3}(i+2)\,c_ir^{i+1}\cos^i\theta\sin^3\theta$$
$$-3d_0^1r^2\sin^4\theta - \sum_{i=0}^{\mu} b_{2i}r^{2i}\cos^{2i}\theta\left((2i+1)\sin^2\theta - \cos^2\theta\right),$$

et $y_1(\theta,r) = \int_0^\theta F_1(t,r)\,dt$. Pour ce faire, nous réécrivons

$$\begin{aligned} F_1(\theta,r) &= \sum_{i=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} e_{2i+1}r^{2i+1}\cos^{2i+2}\theta + \sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} e_{2i}r^{2i}\cos^{2i+1}\theta + e_3r^3\cos^4\theta \\ &\quad -\sum_{i=0}^{n_1} a_ir^i\cos^i\theta\sin\theta - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]} b_{2i+1}r^{2i+2}\cos^{2i+1}\theta\sin^2\theta - d_0^1r^3\sin^4\theta \\ &\quad -\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2}{2}\right]} b_{2i}r^{2i+1}\cos^{2i}\theta\sin^2\theta - b_2r^3\cos^2\theta\sin^2\theta - \sum_{i=0}^{n_3} c_ir^{i+2}\cos^i\theta\sin^3\theta \\ &= \sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} e_{2i}r^{2i}\cos^{2i+1}\theta + e_3r^3\cos^4\theta - \sum_{i=0}^{n_1} a_ir^i\cos^i\theta\sin\theta \\ &\quad - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]} b_{2i+1}r^{2i+2}\cos^{2i+1}\theta\sin^2\theta - \sum_{i=0}^{n_3} c_ir^{i+2}\cos^i\theta\sin^3\theta - d_0^1r^3\sin^4\theta \\ &\quad -b_2r^3\cos^2\theta\sin^2\theta - \sum_{i=0}^{\mu} b_{2i}r^{2i+1}\cos^{2i}\theta + \sum_{i=0}^{\mu}\frac{2i+2}{2i+1}b_{2i}r^{2i+1}\cos^{2i+2}\theta. \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que

$$\frac{1}{2^{2i}}\begin{pmatrix} 2i \\ i \end{pmatrix}\theta - \frac{2i+2}{2i+1}\frac{1}{2^{2i+2}}\begin{pmatrix} 2i+2 \\ i+1 \end{pmatrix}\theta = 0,$$

en utilisant les intégrales de l'annexe et comme $b_2 = 3e_3 - 3d_0^1$ nous obtenons

$$\begin{aligned} y_1(\theta,r) &= \sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} e_{2i}r^{2i}\sum_{l=0}^{i}\gamma_{i,l}\sin(2l+1)\theta + \frac{1}{8}e_3r^3\left(2\sin 2\theta + \sin 4\theta\right) \\ &\quad -\sum_{i=0}^{n_1}\frac{a_i}{i+1}r^i\left(1-\cos^{i+1}\theta\right) + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]}\frac{1}{2i+3}b_{2i+1}r^{2i+2}\cos^{2i+2}\theta\sin\theta \end{aligned}$$

$$-\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]}\frac{1}{(2i+3)}b_{2i+1}r^{2i+2}\sum_{l=0}^{i}\gamma_{i,l}\sin(2l+1)\theta-\sum_{i=0}^{n_3}c_ir^{i+2}\left(\frac{2}{(i+1)(i+3)}-\frac{1}{i+1}\right.$$
$$\left.\times\cos^{i+1}\theta+\frac{1}{i+3}\cos^{i+3}\theta\right)+\frac{1}{8}d_0^1r^3\left(2\sin 2\theta-\sin 4\theta\right)-\sum_{i=0}^{\mu}b_{2i}r^{2i+1}\sum_{l=1}^{i+1}\tilde{\beta}_{i,l}$$
$$\times\sin(2l\theta),$$

où

$$\tilde{\beta}_{i,l}=\begin{cases}\beta_{i,l}-\frac{2(i+1)\beta_{i+1,l}}{(2i+1)}, & 0\le l\le i,\\ -\frac{2(i+1)\beta_{i+1,i+1}}{(2i+1)}, & l=i+1.\end{cases}$$

Pour déterminer la fonction

$$F_{20}(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dF_1(\theta,r)}{dr}y_1(\theta,r)\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_2(\theta,r)d\theta,$$

notant par

$$I(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{dF_1(\theta,r)}{dr}y_1(\theta,r)\right)d\theta,\quad II(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_2(\theta,r)d\theta.$$

Maintenant, divisons le calcul de la fonction $I(r)$ en six morceaux. Pour cela, nous posons

$$I(r)=I_1(r)+I_2(r)+I_3(r)+I_4(r)+I_5(r)+I_6(r),$$

où

$$\begin{aligned}
I_1(r) &= \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{i=0}^{n_1}ia_ir^{i-1}\cos^i\theta\sin\theta y_1(\theta,r)\,d\theta,\\
I_2(r) &= \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]}(2i+2)\,b_{2i+1}r^{2i+1}\cos^{2i+1}\theta\sin^2\theta+3b_2r^2\cos^2\theta\sin^2\right)y_1(\theta,r)\,d\theta,\\
I_3(r) &= \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{i=0}^{n_3}(i+2)\,c_ir^{i+1}\cos^i\theta\sin^3\theta y_1(\theta,r)\,d\theta,\\
I_4(r) &= \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}3d_0^1r^2\sin^4\theta y_1(\theta,r)\,d\theta,\\
I_5(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}2ie_{2i}r^{2i-1}\cos^{2i+1}\theta+3e_3r^2\cos^4\theta\right)y_1(\theta,r)\,d\theta,\\
I_6(r) &= \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{i=0}^{\mu}b_{2i}r^{2i}\cos^{2i}\theta\left((2i+1)\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)\right)y_1(\theta,r)\,d\theta.
\end{aligned}$$

Les intégrales seront calculées dans les lemmes suivants :

Lemme 4.2.1 *L'intégrale $I_1(r)$ est un polynôme de la variable r donnée par*

$$\begin{aligned} I_1(r) &= \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]} A_{i,j}a_{2i}b_{2j+1}r^{2i+2j+1} - \sum_{j=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]} \frac{(2i+1)}{2^{i+3}(i+3)!}a_{2i+1} \\ &\times(3\alpha_{i+1}d_0^1 + \alpha_{i+2}e_3)r^{2i+3} - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} i\sum_{l=0}^{j}\gamma_{j,l}C_{i,l}a_{2j}e_{2i}r^{2i+2j-1} \\ &+ \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]}\sum_{i=0}^{\mu}\frac{(2i+1)}{2}\sum_{l=1}^{j+1}\tilde{\beta}_{j,l}\tilde{C}_{i,l}a_{2i+1}b_{2j}r^{2i+2j+1}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

où $A_{i,j}$ est constante non nulle.

Preuve. En utilisant les intégrales de l'annexe, nous obtenons
$(\alpha_{k+2} = (2k+3)(2k+1)\alpha_k)$

$$(\mathbf{a}_1)\quad \int_0^{2\pi}\left(\sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1}\cos^i\theta\sin\theta\right)\left(\sum_{j=0}^{n_1}\frac{a_j}{j+1}r^j\left(1-\cos^{i+1}\theta\right)\right) = 0.$$

$$(\mathbf{b}_1)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1}\cos^i\theta\sin\theta\right)\left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]}\frac{1}{2j+3}b_{2j+1}r^{2j+2}\left(-\cos^{2j+2}\theta\sin\theta\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{l=0}^{j}\gamma_{j,l}\sin(2l+1)\theta\right)\right) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]} A_{i,j}a_{2i}b_{2j+1}r^{2i+2j+1},$$

où $A_{i,j} = \dfrac{i}{2j+3}\left(\displaystyle\sum_{l=0}^{j}\gamma_{j,l}C_{i,l} - \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!}\right).$

$$(\mathbf{c}_1)\quad \int_0^{2\pi}\left(\sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1}\cos^i\theta\sin\theta\right)\left(\sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2}\left(\frac{2}{(i+1)(i+3)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{i+1}\cos^{i+1}\theta + \frac{1}{i+3}\cos^{i+3}\theta\right)\right) = 0.$$

$$(\mathbf{d}_1)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1}\cos^i\theta\sin\theta\right)\left(\frac{1}{8}d_0^1 r^3\left(2\sin 2\theta - \sin 4\theta\right)\right)$$

$$= -\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]}\frac{3(2i+1)\alpha_{i+1}}{2^{i+3}(i+3)!}a_{2i+1}d_0^1 r^{2i+3}.$$

(e$_1$) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1}\cos^i\theta\sin\theta\right)\left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} e_{2j}r^{2j}\sum_{l=0}^{j}\gamma_{j,l}\sin(2l+1)\theta\right)$$
$$= -\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\sum_{l=0}^{j}\gamma_{j,l}C_{i,l}a_{2i}e_{2i}r^{2i+2j-1}.$$

(f$_1$) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1}\cos^i\theta\sin\theta\right)\left(\tfrac{1}{8}e_3r^3\left(2\sin2\theta+\sin4\theta\right)\right)$$
$$= -\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]}\frac{(2i+1)\alpha_{i+2}}{2^{i+3}(i+3)!}a_{2i+1}e_3r^{2i+3}.$$

(g$_1$) $$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1}\cos^i\theta\sin\theta\right)\left(\sum_{j=0}^{\mu} b_{2i}r^{2j+1}\sum_{l=1}^{j+1}\tilde{\beta}_{j,l}\sin(2l\theta)\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]}\sum_{i=0}^{\mu}\frac{(2i+1)}{2}\sum_{l=1}^{j+1}\tilde{\beta}_{j,l}\tilde{C}_{i,l}a_{2i+1}b_{2j}r^{2i+2j+1}.$$

On sait que la somme des intégrales $(a_1),(g_1)$ est le polynôme (4.8).

Lemme 4.2.2 *L'intégrale $I_2(r)$ est un polynôme de la variable r donnée par*

$$\begin{aligned}
I_2(r) \;=\; & -\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]}\frac{(j+1)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}\,(2i+1)\,(i+j+2)!}a_{2i}b_{2j+1}r^{2i+2j+1}\\
& -\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]}\frac{3\alpha_{i+2}}{2^{i+4}(i+1)(i+3)!}a_{2i+1}b_2r^{2i+3}\\
& +\sum_{i=0}^{n_1}\frac{3}{8(i+1)}a_ib_2r^{i+2}+\sum_{i=0}^{n_3}\frac{3}{4(i+1)(i+3)}b_2c_ir^{i+4}\\
& -\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3}{2}\right]}\frac{(i+1)(10j+4i+15)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}\,(2j+3)\,(2j+1)(i+j+3)!}b_{2i+1}c_{2j}r^{2i+2j+3}\\
& -\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]}\frac{3(5i+11)\alpha_{i+2}}{2^{i+5}(i+1)(i+2)(i+4)!}b_2c_{2i+1}r^{2i+5}. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant les intégrales de l'annexe, nous obtenons $(\alpha_{k+3}=(2k+5)(2k+3)(2k+1)\alpha_k)$

(a$_2$) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=0}^{n_2}(j+1)\,b_jr^j\cos^j\theta\sin^2\theta\right)\left(\frac{a_i}{i+1}r^i\left(1-\cos^{2i+1}\theta\right)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n_1} \frac{3}{8(i+1)} a_i b_2 r^{i+2} - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]} \frac{3\alpha_{i+2}}{2^{i+4}(i+1)(i+3)!} a_{2i+1} b_2 r^{2i+3}$$

$$- \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]} \frac{(j+1)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(2i+1)(i+j+2)!} a_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+1}.$$

(b$_2$) $$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=0}^{n_2} (j+1) b_j r^j \cos^j\theta \sin^2\theta \right) \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]} \tfrac{1}{2i+3} b_{2i+1} r^{2i+2} \times \right.$$

$$\left. \left(-\cos^{2i+2}\theta \sin\theta + \sum_{l=0}^{i} \gamma_{i,l} \sin(2l+1)\theta \right) \right) = 0.$$

(c$_2$) $$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{n_2} (i+1) b_i r^i \cos^i\theta \sin^2\theta \right) \left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3}{2}\right]} c_{2j} r^{2j+2} \left(\frac{2}{(j+1)(j+3)} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{2j+1} \cos^{2j+1}\theta + \frac{1}{2j+3} \cos^{2j+3}\theta \right) \right) = \sum_{i=0}^{n_3} \frac{3}{4(i+1)(i+3)} b_2 c_i r^{i+4}$$

$$- \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3}{2}\right]} \frac{(i+1)(10j+4i+15)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(2j+3)(2j+1)(i+j+3)!} b_{2i+1} c_{2j} r^{2i+2j+3}$$

$$- \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]} \frac{3(5i+11)\alpha_{i+2}}{2^{i+5}(i+1)(i+2)(i+4)!} b_2 c_{2i+1} r^{2i+5}.$$

(d$_2$) $$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\sum_{j=0}^{n_2} (i+1) b_i r^i \cos^i\theta \sin^2\theta \right) \left(\frac{1}{8} d_0^1 r^3 (2\sin 2\theta - \sin 4\theta) \right) = 0.$$

(e$_2$) $$\int_0^{2\pi} \left(-\sum_{i=0}^{n_2} (i+1) b_i r^i \cos^i\theta \sin^2\theta \right) \left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} e_{2j} r^{2j} \sum_{l=0}^{j} \gamma_{j,l} \sin(2l+1)\theta \right) = 0.$$

(f$_2$) $$\frac{1}{2\pi} \left(-\sum_{i=0}^{n_2} (i+1) b_i r^i \cos^i\theta \sin^2\theta \right) \left(\frac{1}{8} e_3 r^3 (2\sin 2\theta + \sin 4\theta) \right) = 0.$$

(g$_2$) $$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=0}^{n_2} (j+1) b_j r^j \cos^j\theta \sin^2\theta \right) \left(\sum_{i=0}^{\mu} b_{2i} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l\theta) \right) = 0.$$

On sait que la somme des intégrales $(a_2), (g_2)$ est le polynôme (4.9).

Lemme 4.2.3 *L'intégrale $I_3(r)$ est un polynôme de la variable r donnée par*

$$\begin{aligned} I_3(r) &= -\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(i+1)\sum_{l=0}^{j}\gamma_{j,l}K_{i,l}c_{2i}e_{2j}r^{2i+2j+1} \\ &+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3}{2}\right]}B_{i,j}b_{2i+1}c_{2j}r^{2i+2j+3}-\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]}\frac{3\alpha_{i+2}}{2^{i+5}(i+4)!}(7d_0^1+(4i+9)e_3) \\ &\times c_{2i+1}r^{2i+5}+\sum_{i=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]}\frac{(2j+3)}{2}\sum_{l=1}^{i+1}\tilde{\beta}_{i,l}\tilde{K}_{j,l}b_{2i}c_{2j+1}r^{2i+2j+3}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

où $B_{i,j}$ est constante non nulle.

Preuve. En utilisant les intégrales de l'annexe, nous obtenons

(a$_3$) $$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=0}^{n_3}(j+2)\,c_jr^{j+1}\cos^j\theta\sin^3\theta\right)\left(\sum_{i=0}^{n_1}\frac{a_i}{i+1}r^i\left(1-\cos^{i+1}\theta\right)\right)=0.$$

(b$_3$) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=0}^{n_3}(j+2)\,c_jr^{j+1}\cos^j\theta\sin^3\theta\right)\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]}\frac{1}{2i+3}b_{2i+1}r^{2i+2}\times\right.$$

$$\left.\left(-\cos^{2i+2}\theta\sin\theta+\sum_{l=0}^{i}\gamma_{i,l}\sin(2l+1)\theta\right)\right)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3}{2}\right]}B_{i,j}b_{2i+1}c_{2j}r^{2i+2j+3}.$$

où $B_{i,j}=\dfrac{(j+1)}{2i+3}\left(\sum_{l=0}^{i}\gamma_{i,l}K_{j,l}-\dfrac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!}\right)$.

(c$_3$) $$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=0}^{n_3}(j+2)\,c_jr^{j+1}\cos^j\theta\sin^3\theta\right)\left(\sum_{i=0}^{n_3}c_ir^{i+2}\left(\frac{2}{(i+1)(i+3)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{i+1}\cos^{i+1}\theta+\frac{1}{i+3}\cos^{i+3}\theta\right)\right)=0.$$

(d$_3$) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\sum_{i=0}^{n_3}(i+2)\,c_ir^{i+1}\cos^i\theta\sin^3\theta\right)\left(\frac{1}{32}d_0^1r^3\left(2\sin2\theta-\sin4\theta\right)\right)$$

$$=-\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]}\frac{21\alpha_{i+2}}{2^{i+5}(i+4)!}c_{2i+1}d_0^1r^{2i+5}.$$

(e$_3$) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\sum_{i=0}^{n_3}(i+2)\,c_ir^{i+1}\cos^i\theta\sin^3\theta\right)\left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}e_{2j}r^{2j}\sum_{l=0}^{j}\gamma_{j,l}\sin(2l+1)\theta\right)$$

$$= -\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(i+1)\sum_{l=0}^{j}\gamma_{j,l}K_{j,l}c_{2i}e_{2j}r^{2i+2j+1}.$$

(f₃) $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\sum_{i=0}^{n_3}(i+2)\,c_i r^{i+1}\cos^i\theta\sin^3\theta\right)\left(\frac{1}{8}e_3 r^3\left(2\sin 2\theta+\sin 4\theta\right)\right)$

$$= -\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]}\frac{3(4i+9)\alpha_{i+2}}{2^{i+5}(i+4)!}c_{2i+1}e_3 r^{2i+3}.$$

(g₃) $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=0}^{n_3}(j+2)\,c_j r^{j+1}\cos^j\theta\sin^3\theta\right)\left(\sum_{i=0}^{\mu}b_{2i}r^{2i+1}\sum_{l=1}^{i+1}\tilde{\beta}_{i,l}\sin(2l\theta)\right)$

$$= \sum_{i=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]}\frac{(2j+3)}{2}\sum_{l=1}^{i+1}\tilde{\beta}_{i,l}\tilde{K}_{j,l}b_{2i}c_{2j+1}r^{2i+2j+3}.$$

On sait que la somme des intégrales $(a_3),(g_3)$ est le polynôme (4.10).

Lemme 4.2.4 *L'intégrale $I_4(r)$ est un polynôme de la variable r donnée par*

$$\begin{aligned} I_4(r) &= -\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]}\frac{9\alpha_{i+1}}{2^{i+4}(i+1)(i+3)!}a_{2i+1}d_0^1 r^{2i+3} \\ &\quad +\sum_{i=0}^{n_1}\frac{9}{8\,(i+1)}a_i d_0^1 r^{i+2}+\sum_{i=0}^{n3}\frac{9}{4(i+1)(i+3)}c_i d_0^1 r^{i+4} \\ &\quad -\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]}\frac{9(7i+13)\alpha_{i+1}}{2^{i+5}(i+1)(i+2)(i+4)!}c_{2i+1}d_0^1 r^{2i+5}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

Preuve. En utilisant les intégrales de l'annexe, nous obtenons

(a₄) $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(3d_0^1 r^2\sin^4\theta\right)\left(\sum_{i=0}^{n_1}\frac{a_i}{i+1}r^i\left(1-\cos^i\theta\right)\right) = \sum_{i=0}^{n_1}\frac{9}{8\,(i+1)}a_i d_0^1 r^{i+2}$

$$-\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]}\frac{9\alpha_{i+1}}{2^{i+4}(i+1)(i+3)!}a_{2i+1}d_0^1 r^{2i+3}.$$

(b₄) $\displaystyle \int_0^{2\pi}\left(3d_0^1 r^2\sin^4\theta\right)\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]}\frac{1}{2i+3}b_{2i+1}r^{2i+2}\left[-\cos^{2i+2}\theta\sin\theta\right.\right.$

$$\left.\left.+\sum_{l=0}^{i}\gamma_{i,l}\sin(2l+1)\theta\right]\right) = 0.$$

$$(\mathbf{c}_4)\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(3d_0^1 r^2\sin^4\theta\right)\left(\sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2}\left(\frac{2}{(i+1)(i+3)}-\frac{1}{i+1}\cos^{i+1}\theta+\frac{1}{i+3}\cos^{i+3}\theta\right)\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{n_3}\frac{9}{4(i+1)(i+3)}c_i d_0^1 r^{i+4}-\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]}\frac{9(7i+13)\alpha_{i+1}}{2^{i+5}(i+1)(i+2)(i+4)!}c_{2i+1}d_0^1 r^{2i+5}.$$

$$(\mathbf{d}_4)\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-3d_0^1 r^2\sin^4\theta\right)\left(\frac{1}{8}d_0^1 r^3\left(2\sin 2\theta-\sin 4\theta\right)\right)=0.$$

$$(\mathbf{e}_4)\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-3d_0^1 r^2\sin^4\theta\right)\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} e_{2i} r^{2i}\sum_{l=0}^{i}\gamma_{i,l}\sin(2l+1)\theta\right)=0.$$

$$(\mathbf{f}_4)\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-3d_0^1 r^2\sin^4\theta\right)\left(\frac{1}{8}e_3 r^3\left(2\sin 2\theta+\sin 4\theta\right)\right)=0.$$

$$(\mathbf{g}_4)\ \int_0^{2\pi}\left(3d_0^1 r^2\sin^4\theta\right)\left(\sum_{i=0}^{\mu} b_{2i} r^{2i+1}\sum_{l=1}^{i+1}\tilde{\beta}_{i,l}\sin(2l\theta)\right)=0.$$

On sait que la somme des intégrales $(a_4),(g_4)$ est le polynôme (4.11).

Lemme 4.2.5 *L'intégrale $I_5(r)$ est un polynôme de la variable r donnée par*

$$\begin{aligned}
I_5(r) \;=\;& \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{j\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j}(2i+1)(i+j+1)!}a_{2i}e_{2j}r^{2i+2j-1}\\
&-\sum_{i=0}^{n_1}\frac{9}{8\,(i+1)}a_i e_3 r^{i+2}+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]}\frac{3\alpha_{i+3}}{2^{i+4}(i+1)(i+3)!}a_{2i+1}e_3 r^{2i+3}\\
&+\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{j(6i+4j+9)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(2i+3)(2i+1)(i+j+2)!}c_{2i}e_{2j}r^{2i+2j+1}\\
&+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]}\frac{9(i+3)\alpha_{i+3}}{2^{i+5}(i+1)(i+2)(i+4)!}c_{2i+1}e_3 r^{2i+5}\\
&-\sum_{i=0}^{n_3}\frac{9}{4(i+1)(i+3)}c_i e_3 r^{i+4},
\end{aligned}\tag{4.12}$$

Preuve. En utilisant les intégrales de l'annexe, nous obtenons $(\alpha_{k+4}=(2i+7)\ \ (2i+5)(2k+3)(2k+1)\alpha_k)$.

$$(\mathbf{a}_5)\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=0}^{m} j e_j r^{j-1}\cos^{j+1}\theta\right)\left(-\sum_{i=0}^{n_1}\frac{a_i}{i+1}r^i\left(4\theta-\cos^{2i+1}\theta\right)\right)$$

$$= -\sum_{i=0}^{n_1} \frac{9}{8\,(i+1)} a_i e_3 r^{i+2} + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]} \frac{3\alpha_{i+3}}{2^{i+4}(i+1)(i+3)!} a_{2i+1} e_3 r^{2i+3}$$

$$+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{j\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j}(2i+1)(i+j+1)!} a_{2i} e_{2j} r^{2i+2j-1}.$$

(b$_5$) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=0}^{m} j e_j r^{j-1} \cos^{j+1}\theta\right) \left(-\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]} \frac{1}{2i+3} b_{2i+1} r^{2i+2} \left[-\cos^{2i+2}\theta \sin\theta \right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{l=0}^{i} \gamma_{i,l} \sin(2l+1)\theta\right]\right) = 0.$$

(c$_5$) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=0}^{m} j e_j r^{j-1} \cos^{j+1}\theta\right) \left(-\sum_{i=0}^{m} c_i r^{i+2} \left(\sum_{i=0}^{n_3} \frac{2}{(i+1)(i+3)} c_i r^{i+2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{i+1}\cos^{i+1}\theta + \frac{1}{i+3}\cos^{i+3}\theta\right)\right) = -\sum_{i=0}^{n_3} \frac{9}{4(i+1)(i+3)} c_i e_3 r^{i+4}$$

$$+\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{j(6i+4j+9)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(2i+3)(2i+1)(i+j+2)!} c_{2i} e_{2j} r^{2i+2j-1}$$

$$+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]} \frac{9(i+3)\alpha_{i+3}}{2^{i+5}(i+1)(i+2)(i+4)!} c_{2i+1} e_3 r^{2i+5}.$$

(d$_5$) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{m} i e_i r^{i-1} \cos^{i+1}\theta\right) \left(\frac{1}{8} d_0^1 r^3 \left(2\sin 2\theta - \sin 4\theta\right)\right) = 0.$$

(e$_5$) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=0}^{m} j e_j r^{j-1} \cos^{j+1}\theta\right) \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} e_{2i} r^{2i} \sum_{l=0}^{i} \gamma_{i,l} \sin(2l+1)\theta\right) = 0.$$

(f$_5$) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{m} i e_i r^{i-1} \cos^{i+1}\theta\right) \left(\frac{1}{8} e_3 r^3 \left(2\sin 2\theta + \sin 4\theta\right)\right) = 0.$$

(g$_5$) $$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=0}^{m} j e_j r^{j-1} \cos^{j+1}\theta\right) \left(-\sum_{i=0}^{\mu} b_{2i} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l\theta)\right) = 0.$$

On sait que la somme des intégrales $(a_5), (g_5)$ est le polynôme (4.12).

Lemme 4.2.6 *L'intégrale $I_6(r)$ est un polynôme de la variable r donnée par*

$$
\begin{aligned}
I_6(r) \;=\; & \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]} \sum_{j=0}^{\mu} \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+2)!} a_{2i+1} b_{2j} r^{2i+2j+1} \\
& + \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]} \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!} b_{2i} c_{2j+1} r^{2i+2j+3}. \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

Preuve. En utilisant les intégrales de l'annexe, nous obtenons

(a$_6$) $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=0}^{\mu} b_{2j} r^{2j} \cos^{2j}\theta \left((2j+1)\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) \right) \left(\sum_{i=0}^{n_1} \frac{a_i}{i+1} r^i \,(4\theta \right.$

$\displaystyle \left. - \cos^{i+1}\theta) \right) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]} \sum_{j=0}^{\mu} \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+2)!} a_{2j+1} b_{2j} r^{2i+2j+1}.$

(b$_6$) $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=0}^{\mu} b_{2j} r^{2j} \cos^{2j}\theta \left((2j+1)\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) \right) \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]} \frac{1}{2i+3} b_{2i+1} r^{2i+2} \right.$

$\displaystyle \left. \times \left[-\cos^{2i+2}\theta \sin\theta + \sum_{l=0}^{i} \gamma_{i,l} \sin(2l+1)\theta \right] \right) = 0.$

(c$_6$) $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0} b_{2i} r^{2i} \cos^{2i}\theta \left((2i+1)\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) \right) \left(\left(\sum_{j=0}^{n_3} c_j r^{j+2} \right.\right.$

$\displaystyle \left.\left. \times \left(\frac{2}{(j+1)(j+3)} c_j r^{j+2} - \frac{1}{j+1} \cos^{j+1}\theta + \frac{1}{j+3} \cos^{j+3}\theta \right) \right) \right)$

$\displaystyle = \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]} \frac{3\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(i+j+3)!} b_{2i} c_{2j+1} r^{2i+2j+3}.$

(d$_6$) $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(-\sum_{i=0}^{\mu} b_{2i} r^{2i} \cos^{2i}\theta \left((2i+1)\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) \right) \left(\frac{1}{8} d_0^1 r^3 \,(8\sin 2\theta \right.$

$\left. - \sin 4\theta) \right) = 0.$

(e$_6$) $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(-\sum_{i=0}^{\mu} b_{2i} r^{2i} \cos^{2i}\theta \left((2i+1)\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) \right) \left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} e_{2j} r^{2j} \right.$

$\displaystyle \left. \times \sum_{l=0}^{j} \gamma_{j,l} \sin(2l+1)\theta \right) = 0.$

(f$_6$) $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(-\sum_{i=0}^{\mu} b_{2i} r^{2i} \cos^{2i}\theta \left((2i+1)\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) \right) \left(\frac{1}{8} e_3 r^3 \,(8\sin 2\theta \right.$

$+\sin 4\theta)) = 0.$

$$(\mathbf{g}_6)\ \int_0^{2\pi}\left(\sum_{i=0}^{\mu} b_{2i}r^{2i}\cos^{2i}\theta\left((2i+1)\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)\right)\left(\sum_{j=0}^{\mu} b_{2j}r^{2j+1}\right.$$

$$\left.\times\sum_{l=1}^{j+1}\tilde{\beta}_{j,l}\sin(2l\theta)\right)=0.$$

On sait que la somme des intégrales $(a_6),(g_6)$ est le polynôme (4.13).

En utilisant les lemmes 4.2.1-4.2.6, on obtient :

$$I(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{dF_1(\theta,r)}{dr}y_1(\theta,r)\right)d\theta = I_1(r)+I_2(r)+I_3(r)+I_4(r)+I_5(r)+I_6(r).$$

Maintenant, nous considérons l'intégrale $II(r)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}F_2(r,\theta)\,d\theta$. On a $b_2=3e_3-3d_0^1$, d'où $II(r)$ est égal à

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\frac{\alpha_{i+1}}{2^{i+1}(i+1)!}v_{2i+1}r^{2i+1}-\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2}{2}\right]}\frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!}q_{2i}r^{2i+1}-\frac{3}{8}d_0^2r^3\\
&-\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]}\frac{\alpha_{i+j+1}a_{2i}b_{2j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!}r^{2i+2j+1}-\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3}{2}\right]}\frac{3\alpha_{i+j+1}b_{2i+1}c_{2j}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!}r^{2i+2j+3}\\
&+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]}\frac{\alpha_{i+1}}{2^{i+2}(i+3)!}a_{2i+1}\left((i+1)d_0^1+(i+5)(2i+3)e_3\right)r^{2i+3}\\
&+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]}\frac{\alpha_{i+2}\left(d_0^1-(i-8)e_3\right)c_{2i+1}}{2^{i+3}(i+4)!}r^{2i+5}+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{(i+j)\alpha_{i+j}a_{2i}e_{2j}}{2^{i+j}(i+j+1)!}r^{2i+2j-1}\\
&+\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{(i+j-1)\alpha_{i+j}c_{2i}e_{2j}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!}r^{2i+2j+1}-\sum_{j=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]}\frac{(5i-j+3)\alpha_{i+j+1}b_{2i}c_{2j+1}}{2^{i+j+2}(2i+1)(i+j+3)!}r^{2i+2j+3}\\
&+\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\mu}\frac{(i-j)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(2j+1)(i+j+2)!}a_{2i+1}b_{2j}r^{2i+2j+3}.
\end{aligned}\tag{4.14}$$

De finalement, $F_{20}(r) = I(r) + II(r)$ est égal à

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]} E_{i,j}a_{2i}b_{2j+1}r^{2i+2j+1} + \sum_{j=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\tilde{E}_{i,j}a_{2i}e_{2j}r^{2i+2j-1} \\
&+ \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]} \frac{3\alpha_{i+1}a_{2i+1}d_0^1}{2^{i+2}(i+2)!}r^{2i+3} + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]} \frac{\alpha_{i+1}\left(3d_0^1 + 2(2i+3)e_3\right)c_{2i+1}}{2^{i+3}(i+3)!}r^{2i+5} \\
&+ \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3}{2}\right]} F_{i,j}b_{2i+1}c_{2j}r^{2i+2j+3} + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\tilde{F}_{i,j}c_{2i}e_{2j}r^{2i+2j+1} \\
&+ \sum_{i=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{\alpha_{i+1}}{2^{i+1}(i+1)!}v_{2i+1}r^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2}{2}\right]} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!}q_{2i}r^{2i+1} - \frac{3}{8}d_0^2 r^3 \\
&+ \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\mu} H_{i,j}a_{2i+1}b_{2j}r^{2i+2j+1} + \sum_{i=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]} \tilde{H}_{i,j}b_{2i}c_{2j+1}r^{2i+2j+3}, \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
E_{i,j} &= A_{i,j} - \frac{(2i+j+2)\,\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(2i+1)(i+j+2)!}, \\
\tilde{E}_{i,j} &= \frac{(2i^2+2j^2+4ij+i+2j)\alpha_{i+j}}{2^{i+j}(2i+1)(i+j+1)!} - i\sum_{l=0}^{j}\gamma_{j,l}C_{i,l}, \\
F_{i,j} &= B_{i,j} - \frac{(4i^2+12j^2+10ij+19i+34j+24)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(2j+3)(2j+1)(i+j+3)!}, \\
\tilde{F}_{i,j} &= \frac{(4i^3+8j^3+20j^2i+22j^2+16i^2j+32ij+4i^2+12j-5i-3)\alpha_{i+j}}{2^{i+j+1}(2i+3)(2i+1)(i+j+2)!} \\
&\quad - (i+1)\sum_{l=0}^{j}\gamma_{j,l}K_{i,l}, \\
H_{i,j} &= \sum_{l=1}^{j+1}\frac{(2i+1)}{2}\tilde{\beta}_{j,l}\tilde{C}_{i,l} + \frac{(2i+1)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(2j+1)(i+j+2)!}, \\
\tilde{H}_{i,j} &= \sum_{l=1}^{i+1}\frac{(2j+3)}{2}\tilde{\beta}_{i,l}\tilde{K}_{j,l} - \frac{(4i-2j+3)\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+3}(2i+1)(i+j+3)!}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, F_{20} a au plus max max $\left\{\left[\frac{n_1}{2}\right]+\left[\frac{n_2-1}{2}\right], \left[\frac{n_1}{2}\right]+\left[\frac{m}{2}\right]-1, \left[\frac{n_1+1}{2}\right], \left[\frac{n_3+3}{2}\right], \left[\frac{n_3}{2}\right]+\left[\frac{m}{2}\right], \left[\frac{n_2+1}{2}\right]+\left[\frac{n_3}{2}\right], \left[\frac{n_2}{2}\right], \left[\frac{m-1}{2}\right], \left[\frac{n_1-1}{2}\right]+\mu, \left[\frac{n_3+1}{2}\right]+\mu, 1\right\}$ racines positives.

4.3 Applications

Dans cette section, nous montrons que dans les exemples suivants, la borne λ_1 (λ_2 respectivement) est atteinte. (les calculs ont été vérifiés à l'aide de Maple).

Exemple 4.3.1 *($n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 1$ et $m = 6$)*
On considère le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \varepsilon l^1(x) + \varepsilon^2 l^2(x), \\ \dot{y} &= x - \varepsilon(f^1(x) + g^1(x)y + h^1(x)y^2 + d_0^1 y^3) \\ &\quad -\varepsilon^2(f^2(x) + g^2(x)y + h^2(x)y^2 + d_0^2 y^3), \end{aligned} \tag{4.16}$$

où

$$\begin{aligned} &f^1(x) = a_0 + a_1 x, \quad g^1(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2, \quad h^1(x) = c_0 + c_1 x, \\ &l^1(x) = e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + e_3 x^3 + e_4 x^4 + e_5 x^5 + e_6 x^6, \\ &f^2(x) = p_0 + p_1 x, \quad g^2(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2, \quad h^2(x) = s_0 + s_1 x \\ &\textit{and } l^2(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + v_3 x^3 + v_4 x^4 + v_5 x^5 + v_6 x^6. \end{aligned}$$

Tout d'abord, nous allons étudier les cycles limites de l'équation différentielle (4.16) en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre. De (4.5), nous obtenons

$$F_{10}(r) = \frac{r}{2}\left(e_1 - b_0 + \frac{r^2}{4}\left(-b_2 - 3d_0^1 + 3e_3\right) + \frac{5}{8}e_5 r^4\right). \tag{4.17}$$

Maintenant, si nous fixons $b_0 = 1$, $b_2 = 10$, $d_0 = -4$, $e_1 = 3$, $e_3 = -4$ et $e_5 = \frac{4}{5}$. Nous avons $F_{10}(r) = \frac{1}{4}\left(1 - r^2\right)\left(4 - r^2\right)$, qui a exactement deux racines positives. Dans [30], le système (4.16) lorsque $l^1 \equiv l^2 \equiv 0$ a exactement une seule racine positive. Afin d'appliquer la théorie de moyennisation du second ordre, nous avons besoin que F_{10} soit identiquement nulle. Puis, à partir (4.17) nous considérons $e_1 = b_0$, $b_2 = 3e_3 - 3d_0^1$, et $e_5 = 0$. De Eq. (4.15), nous obtenons

$$\begin{aligned} F_{20}(r) = &-\frac{1}{2}b_1 a_0 + a_0 e_2 - c_0 e_0 + \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}q_0 + r^2\left(\frac{3}{8}d_0^1 a_1 - \frac{1}{8}b_1 c_0 - \frac{1}{4}c_1 e_1\right. \\ &\left.+\frac{3}{2}e_4 a_0 + \frac{3}{8}v_3 - \frac{3}{8}d_0^2 - \frac{1}{8}q_2\right) + r^4\left(\frac{11}{24}e_4 c_0 - \frac{1}{8}e_3 c_1 + \frac{15}{8}e_6 a_0\right. \\ &\left.+\frac{1}{16}d_0^1 c_1 + \frac{5}{16}v_5\right) + \frac{25}{32}e_6 c_0 r^6. \end{aligned}$$

Maintenant, si nous fixons $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $b_1 = 3$, $c_0 = \frac{1}{5}$, $c_1 = -1$, $d_0^1 = -4$, $d_0^2 = 2$, $e_0 = 0$, $e_1 = 3$, $e_3 = -4$, $e_4 = \frac{5}{33}$, $e_6 = -\frac{8}{45}$, $v_1 = 0$, $v_3 = 1$, $v_5 = 2$,

$q_0 = -2$ *et* $q_2 = \frac{58}{45}$. *Nous avons que* $F_{20}(r) = \frac{1}{36}\left(1-r^2\right)\left(4-r^2\right)\left(9-r^2\right)$, *qui a exactement trois racines positives. Dans [30], le système* (4.16) *lorsque* $l^1 \equiv l^2 \equiv 0$ *a exactement deux racines positives.*

Exemple 4.3.2 $(n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 4$ *and* $m = 7)$.
On considère le système (4.2), *où*

$$\begin{aligned}
&f^1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad g^1(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3,\\
&h^1(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4,\\
&l^1(x) = e_0 + e_1x + e_2x^2 + e_3x^3 + e_4x^4 + e_5x^5 + e_6x^6,\\
&f^2(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2, \quad g^2(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3,\\
&h^2(x) = s_0 + s_1x + s_2x^2 + s_3x^3 + s_4x^4\\
&\text{and } l^2(x) = v_0 + v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + v_4x^4 + v_5x^5 + v_6x^6.
\end{aligned}$$

En utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre. De l'équation (4.5) *nous obtenons*

$$F_{10}(r) = \frac{r}{2}\left(e_1 - b_0 + r^2\left(-b_2 - 3d_0^1 + 3e_3\right) + \frac{5}{8}e_5r^4 + \frac{35}{128}e_7r^6\right). \tag{4.18}$$

Maintenant, si nous fixons $e_1 = 3$, $b_0 = 1$, $b_2 = 10$, $d_0^1 = -4$, $e_3 = \frac{-116}{27}$, $e_5 = \frac{56}{45}$ *and* $e_7 = -\frac{32}{315}$. *Nous avons* $F_{10}(r) = \frac{1}{36}\left(1-r^2\right)\left(4-r^2\right)\left(9-r^2\right)$, *qui a exactement trois racines positives. Dans [30], ce système lorsque* $l^1 \equiv l^2 \equiv 0$ *a exactement une seule racine positive.*
Afin d'appliquer la théorie de moyennisation du second ordre, nous avons besoin que F_{10} *soit identiquement nulle. Puis à partir de (4.5) nous considérons* $e_1 = b_0$, $b_2 = 3e_3 - 3d_0^1$, $e_5 = 0$ *et* $e_7 = 0$. *De l'équation* (4.15) *nous obtenons*

$$\begin{aligned}
F_{20}(r) = &-\frac{1}{2}b_1a_0 + a_0e_2 - c_0e_0 + \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}q_0 + r^2\left(\frac{3}{8}d_0^1a_1 - \frac{1}{8}b_1c_0 - \frac{1}{4}c_1e_1\right.\\
&\left.+\frac{3}{2}e_4a_0 - \frac{1}{4}c_2e_0 + \frac{3}{8}v_3 - \frac{3}{8}d_0^2 - \frac{1}{8}q_2 - \frac{1}{8}a_2b_1 - \frac{3}{8}b_3a_0 + \frac{1}{4}e_2a_2\right)\\
&+r^4\left(-\frac{1}{48}c_2b_1 + \frac{11}{24}e_4c_0 - \frac{1}{12}e_2c_2 - \frac{1}{8}e_1c_3 - \frac{5}{48}b_3a_2 - \frac{7}{48}b_3c_0\right.\\
&\left.+\frac{5}{12}e_4a_2 - \frac{1}{8}c_4e_0 - \frac{1}{8}e_3c_1 + \frac{15}{8}e_6a_0 + \frac{1}{16}d_0^1c_1 + \frac{5}{16}v_5\right)\\
&+r^6\left(\frac{1}{64}e_4c_2 - \frac{3}{128}c_2b_3 - \frac{5}{64}e_3c_3 + \frac{35}{64}e_6a_2 - \frac{1}{16}c_4e_2\right.\\
&\left.+\frac{25}{32}e_6c_0 + \frac{3}{128}c_3d_0^1 + \frac{35}{128}v_7\right) + r^8\left(\frac{7}{80}e_6c_2 - \frac{11}{1280}b_3c_4 - \frac{13}{640}c_4e_4\right)\\
&+\frac{3}{256}c_4e_6r^{10}.
\end{aligned}$$

Maintenant, si nous fixons $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{25}{54}$, $b_1 = 3$, $b_3 = \frac{135}{118}$, $c_0 = \frac{1}{5}$, $c_1 = -1$, $c_2 = -5$, $c_3 = \frac{598719761}{183274650}$, $c_4 = \frac{-472}{2673}$, $d_0^1 = -4$, $d_0^2 = 2$, $e_0 = 0$, $e_1 = 3$, $e_2 = 1$, $e_3 = -\frac{116}{27}$, $e_4 = \frac{1057617}{226265}$, $e_6 = \frac{99}{2950}$, $v_1 = 0$, $v_3 = 1$, $v_7 = -\frac{29818651106}{12371038875}$, $q_0 = -2$ *et* $q_2 = \frac{1111}{675}$. *Nous avons que* $F_{20}(r) = \frac{1}{14400}\left(1-r^2\right)\left(4-r^2\right)\left(9-r^2\right)(16-r^2)(25-r^2)$, *qui a exactement cinq racines positives. Dans [30], ce système quand* $l^1 \equiv l^2 \equiv 0$ *a exactement deux racines positives.*

Conclusion et perspectives

Cette thèse de doctorat porte sur un aspect important de la théorie qualitative des systèmes différentiels planaires, à savoir les cycles limites. L'importance de déterminer le nombre des cycles limites fait l'objet de la deuxième partie du 16ème problème de Hilbert.
La recherche des cycles limites des systèmes différentiels dépendant d'un petit paramètre peut être étudiée au moyen de la méthode de moyennisation.

Nous continuons à travailler sur des problèmes analogues. On se propose d'étudier le nombre maximum de cycles limites du système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - l(x) - p(x)y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - q(x)y^3, \end{cases}$$

où $l(x) = \varepsilon l^1(x) + \varepsilon^2 l^2(x)$, $p(x) = \varepsilon p^1(x) + \varepsilon^2 p^2(x)$, $f(x) = \varepsilon f^1(x) + \varepsilon^2 f^2(x)$, $g(x) = \varepsilon g^1(x) + \varepsilon^2 g^2(x)$, $h(x) = \varepsilon h^1(x) + \varepsilon^2 h^2(x)$ et $q(x) = \varepsilon q^1(x) + \varepsilon^2 q^2(x)$. Pour chaque $k = 1, 2$, $l^k(x)$, $p^k(x)$, $f^k(x)$, $g^k(x)$, $h^k(x)$ et $q^k(x)$, sont de degrés m_1, m_2 n_1, n_2, n_3 et n_4 respectivement. ε est un paramètre réel suppposé petit.

Annexe

Dans cette annexe, nous rappelons quelques formules qui seront utilisées au cours de cette thèse (voir pour plus de détails ([1], [20])). Pour $i \geq 0$ nous avons

$$\int_0^{2\pi} \cos^i\theta \sin^j\theta d\theta \neq 0, \quad \text{si } i \text{ et } j \text{ pair},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i\theta \sin^j\theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ ou } j \text{ impair}, \\ \dfrac{\pi\alpha_k}{2^{k-1}k!}, & \text{si } i = 2k \text{ et } j = 0, \\ \dfrac{\pi\alpha_k}{2^k(k+1)!}, & \text{si } i = 2k \text{ et } j = 2, \\ \dfrac{3\pi\alpha_k}{2^{k+1}(k+2)!}, & \text{si } i = 2k \text{ et } j = 4, \\ \dfrac{15\pi\alpha_k}{2^{k+2}(k+3)!}, & \text{si } i = 2k \text{ et } j = 6, \end{cases}$$

où $\alpha_i = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i-1)$.

$$\int_0^{2\pi} \cos^i\theta \sin^j\theta \sin(2l\theta) d\theta \neq 0, \text{ si } i \text{ et } j \text{ impair},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i\theta \sin^j\theta \sin((2l+1)\theta) d\theta \neq 0, \text{ si } i \text{ pair et } j \text{ impair},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i\theta \sin^j\theta \sin((2l+1)\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ pair}, \\ \pi C_{i,l}, & \text{si } i \text{ pair et } j = 1,\ l \geq 0, \\ \pi K_{i,l}, & \text{si } i \text{ pair et } j = 3,\ l \geq 0, \end{cases}$$

où $C_{i,l}$ et $K_{i,l}$ sont des constantes réels non nul.

$$\int_0^{2\pi} \cos^i\theta \sin^j\theta \sin(2l\theta)d\theta = \begin{cases} 0, \quad \text{si } i \text{ ou } j\text{pair}, \\ \dfrac{\pi(2k+1)\alpha_k}{2^k(k+2)!}, \quad \text{si } i=2k+1,\ j=1 \text{ et } l=1, \\ \dfrac{\pi k(2k+1)\alpha_k}{2^{k-1}(k+3)!}, \quad \text{si } i=2k+1,\ j=1 \text{ et } l=2, \\ \dfrac{3\pi(2k+1)\alpha_k}{2^{k+1}(k+3)!}, \quad \text{si } i=2k+1,\ j=3 \text{ et } l=1, \\ \dfrac{3\pi(k-1)(2k+1)\alpha_k}{2^k(k+4)!}, \quad \text{si } i=2k+1\ \ j=3 \text{ et } l=2, \\ \pi\widetilde{C}_{i,l}, \quad \text{si } i \text{ impair et } j=1,\ l\geq 0, \\ \pi\widetilde{K}_{i,l}, \quad \text{si } i \text{ impair et } j=3,\ l\geq 0, \end{cases}$$

où $\widetilde{C}_{i,l}$ and $\widetilde{K}_{i,l}$ sont des constantes réels non nul.

$$\int_0^{\theta} \cos^i t \sin t dt = \frac{1}{i+1}\left(1-\cos^{i+1}\theta\right),$$

$$\int_0^{\theta} \cos^{2i+1} t dt = \sum_{l=0}^{i}\gamma_{i,l}\sin(2l+1)\theta, \text{ (voir ([20], P153)).}$$

$$\int_0^{\theta} \cos^{2i+1} t \sin^2 t dt = \frac{-1}{2i+3}\cos^{2i+2}\theta\sin\theta + \frac{1}{(2i+3)}\sum_{l=0}^{i}\gamma_{i,l}\sin(2l+1)\theta, \text{ (voir ([20], P151))}$$

$$\int_0^{\theta} \cos^{2i} t dt = \frac{1}{2^{2i}}\begin{pmatrix} 2i \\ i \end{pmatrix}\theta + \sum_{l=1}^{i}\beta_{i,l}\sin(2l\theta), \text{ (voir ([20], P153)),}$$

où $\gamma_{i,l} = \dfrac{1}{2^{2i}}\begin{pmatrix} 2i+1 \\ i-l \end{pmatrix}\dfrac{1}{2l+1}$, $\beta_{i,l} = \dfrac{1}{2^{2i}}\begin{pmatrix} 2i \\ i+l \end{pmatrix}\dfrac{1}{l}$.

$$\int_0^{\theta} \cos^i t \sin^3 t dt = \frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{i+1}\cos^{i+1}\theta + \frac{1}{i+3}\cos^{i+3}\theta,$$

$$\int_0^{\theta} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{1}{32}\left(4\theta - \sin 4\theta\right),$$

$$\int_0^{\theta} \sin^4 t dt = \frac{1}{32}\left(12\theta - 8\sin 2\theta + \sin 4\theta\right),$$

$$\int_0^\theta \cos^4 t dt = \frac{1}{32}\left(12\theta + 8\sin 2\theta + \sin 4\theta\right).$$

Bibliographie

[1] **Abramowitz M, Stegun I.** *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.* Natl Bureau Stand ApplMath Ser 1972,55. (Cité en page 71.)

[2] **Blows T. R, Lloyd N. G.** *The number of small-amplitude limit cycles of Liénard equations.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1984 ;95 :359-366. (Cité en page 3.)

[3] **Bogoliubov N. N, Mitropolsky Yu. A.** *Asymtotic methods in the theory of nonlinear oscillations.* Gordon and Breach, New York, 1961. (Cité en page 15.)

[4] **Buica A, Llibre J.** *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, Bull. Sci. Math. 2004 ;128 :7-22. (Cité en page 15.)

[5] **Buica A, Françoise J. P, Llibre J.** *Periodic Solutions of Nonlinear periodic Differential Systems with a Small Parameter.* Comm. On Pure and Appl. Anal., 6 :103-111, 2007. (Cité en page 16.)

[6] **Chavarriga J, Sáez E, Szántó I, Grau M.** *Coexistence of limit cycles and invariant algebraic curves for a Kukles system.* Nonlinear Anal. 59, 673-693 (2004). (Cité en page 5.)

[7] **Chen L, Wang M.** *Relative position and number of limit cycles of a quadratic differential system.* Acta Math. Sin. 22, 751-758 (1979, in Chinese). (Cité en page 4.)

[8] **Christopher C. J.** *Estimating limit cycles bifurcations from centers.* In Trends in Mathematics : Differential Equations with Symbolic Computation, pp. 23-35. Birkhauser Verlag, Basel (2006). (Cité en page 4.)

[9] **Christopher C. J, Lloyd N. G.** *Polynomial systems : a lower bound for the Hilbert numbers.* Proc. Math. Phys. Sci. 450 (1995), 219-224 (Cité en page 4.)

[10] **Christopher C. J, Lynch S**. *Limit cycles in highly non-linear differential equations, Journal of Sound and Vibration.* 1999 ;224 :505-517. (Cité en page 3.)

[11] **Coppel W. A.** *Some quadratic systems with at most one limit cycles.* Dynamics reported, Vol. 2. New York : Wiley ; 1998. (Cité en page 3.)

[12] **De Maesschalck P, Dumortier F.** *Classical Liénard equations of degree $n \geq 6$ can have $[(n-1)/2]$ limit cycles.* J Differ Equ 2011 ;250 :2162-76. (Cité en page 3.)

[13] **Dulac H.** *sur les cycles limites.* Bull. Soc. Math. France 5,2 :45-188, 1923. (Cité en page 2.)

[14] **Dumortier F, Li C.** *On the uniqueness of limit cycles surrounding one or more singularities for Liénard equations.* Nonlinearity 1996 ;9 :1489-500. (Cité en page 3.)

[15] **Dumortier F, Li C.** *Quadratic Liénard equations with quadratic damping.* J Differ Equ 1997 ;139 :41-59. (Cité en page 3.)

[16] **Dumortier F, Panazzolo D, Roussarie R.** *More limit cycles than expected in Liénard systems.* Proc Am Math Soc 2007 ;135 :1895-904. (Cité en page 3.)

[17] **Dumortier F, Rousseau C.** *Cubic Liénard equations with linear dapimg.* Nonlinearity 1990 ;3 :1015-1039. (Cité en page 3.)

[18] **García B, Llibre J, Pérez del Río J. S.** *Limit cycles of generalized Liénard polynomial differential systems via averaging theory.* Chaos, Solitons Fractals 2014 ;62-63 :1-9. (Cité en page 38.)

[19] **Gasull A, Torregrosa J.** *Samll-amplitude limit cycles in Liénard systems via multiplicity.* J Differ Equ 1998 ;159 :1015-1039. (Cité en page 3.)

[20] **Gradshteyn I S, Ryshik I M.** *Table of integrals, Series and Products* Edited by A. Jeffrey and D. Zwillinger. Academic Press, New York, 7th edition, 2007. (Cité en pages 71 et 72.)

[21] **Hilbert D.** *Mathematische probleme*, em lecture in : secondInternat. Cong. Math, Paris, 1900, Nachr. Ges. Wiss. Gttingen. Math. Phys. Ki 5 (1900), 253-297 ; English Transl : Bull. Amer. Math. Soc. 1902 ;8 :437-479. (Cité en page 2.)

[22] **Krylov N. M, Bogoliubov N. N.** *Introduction to Nonlinear Mechanics.* (in Russian), Izd. AN UkSSR, Kiev, Vvedenie v Nelineinikhu Mekhaniku, 1937. (Cité en page 15.)

[23] **Kukles I. S.** *Sur quelques cas de distinction entre un foyer et un centre.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR 43, 208-211 (1944). (Cité en page 4.)

[24] **Li C, Liu C, Yang J.** *Acubic system with thirteen limit cycles.* J.Differ. Equ. 246 (2009), 3609-3619. (Cité en page 4.)

[25] **Li C, Llibre J.** *Uniqueness of limit cycles for Liénard differential equations of degree four.* J Differ Equ 2012 ;252 :3142-62. (Cité en page 3.)

[26] **Li J, Chan H. S. Y, Chung K. W.** *Some lower bounds for H(n) in Hilbert's 16th problem.* Qual. Theory Differ. Equ. 3 (2003), 345-360. (Cité en page 4.)

[27] **Liénard A.** *Étude des oscillations entrenues.* Revue générale de l ′électricité 1928 ;23 :946-954. (Cité en page 3.)

[28] **Lins A, de Melo W, Pugh C. C.** *On Liénard ′s equation*, Lecture notes in Math Nonlinear 597, Springer, 1977 ;pp :335-357. (Cité en page 3.)

[29] **Llibre J, Makhlouf A.***Periodic Solutions for a Class of Non-autonomous Newton Differential Equations.* Differential Equations and Dynamical Systems, (2016), 1-7. (Cité en page 34.)

[30] **Llibre J, Mereu A. C.** *Limit cycles for generalized kukles polynomial differential systems.* Nonlinear Analysis 74(2011), 1261-1271. (Cité en pages 51, 52, 67, 68 et 69.)

[31] **Llibre J, Mereu A. C, Teixeira M. A.** *Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations.* Math Proc Camb Phil Soc 2009 ;148 :363-383. (Cité en pages 4 et 22.)

[32] **Llibre J, Valls C**. *Limit cycles for a generalization of Liénard polynomial differential systems.* Chaos Solitons Fractals 2013 ;46 :65-74. (Cité en page 4.)

[33] **Llibre J, Valls C.** *On the number of limit cycles for a generalization of Liénard polynomial differential systems.* Int J Bifurcation Chaos 2013 ;23 [1350048-16 pp.]. (Cité en page 4.)

[34] **Llibre J, Valls C**. *On the number of limit cycles of a class of polynomial differential systems.* Proc A R Soc 2012 ;468 :2347-2360. (Cité en page 4.)

[35] **Llibre J, Zhang X.** *On the Hopf-zero bifurcation of the Michelson system.* Nonlinear Analysis, Real World Applications 12 (2011), 1650-1653. (Cité en page 32.)

[36] **Lloyd N. G.** *Limit cycles of polynomial systems-some recent developments.* London Math. Soc. Lecture note Ser. 127, Cambridge University Press 1988 ;PP :192-234. (Cité en page 3.)

[37] **Lloyd N. G, Lynch S.** *Small-amplitude Limit cycles of certain Liénard systems, Proc. Royal Soc.* Proc R Soc Lond Ser A 1988 ;418 :199-208. (Cité en page 3.)

[38] **Lynch S.** *Limit cycles of generalized Liénard equations.* Appl. Math. Lett. 1995 ;8 :15-17. (Cité en page 3.)

[39] **Malkin I. G.** Some problems of the theory of nonlinear oscillations. (Russian) Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit, Moscow, 1956. (Cité en page 15.)

[40] **Marsden J. E, McCracken M.** *The Hopf bifurcation and its applications.* Applied Mathematical Sciences, vol. 19. Springer, New York (1976) (Cité en page 15.)

[41] **Mellahi N, Boulfoul A, Makhlouf A.** *Maximum Number of Limit Cycles for Generalized Kukles Polynomial Differential Systems.* Differential Equations and Dynamical Systems. pp. 1-22, (2016). (Cité en page 52.)

[42] **Poincaré H.** *Memoire sur les Courbes Définies par Une Équation Différentielle. Jacques Gabay.* Paris (1993) [Edit. Reprinted from the original papers published in the Journal de Mathématiques 7 (1881) 375-422 ; 8 (1882) 251-296 ; 1 (1885) 167-244 and 2 (1886) 151-217]. (Cité en page 2.)

[43] **Roseau M.** *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité.* (French) Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol.8 Springer.Verlag, Berlin. New York, 1966. (Cité en page 15.)

[44] **Rousseau C, Toni B.** *Local bifurcations of critical periods in the reduced Kukles system.* Can. J.Math. 49, 338-358 (1997). (Cité en page 4.)

[45] **Rychkov G. S.** *The maximum number of limit cycle of the system* $\dot{x} = y - a_1x^3 - a_2x^5$, $\dot{y} = -x$ *is two.* Differ Uravn 1975 ;11 :380-391. (Cité en page 3.)

[46] **Sadovskii A. P.** *Cubic systems of nonlinear oscillations with seven limit cycles.* Diff. Uravn. SSSR 39, 472-481 (2003). (Cité en page 4.)

[47] **Sanders J. A, Verhust F.** *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Applied Mathematical Sciences.59 Springer-Verlag, New York ; 1985. (Cité en page 15.)

[48] **Sansone G, Conti R.** *Nonlinear differential equations.* New York, NY. (1964). (Cité en page 3.)

[49] **Smale S.** *Mathematical problems for the next century.* Math. Intelligencer 1998 ;20 :7-15. (Cité en page 3.)

[50] **Songling S.** *A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems.* Scientia Sin. 23 (1980), 154-158. (Cité en page 4.)

[51] **Verhulst F.** *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems.* Universitext, Springer, 1991. (Cité en pages 15 et 16.)

[52] **Wang S, Yu P** *Bifurcation of limit cycles in a quintic Hamiltonian system under a sixth-order perturbation.* Chaos Solitons Fractals 26 (2005), 1317-1335. (Cité en page 4.)

[53] **Xianwu Z.** *Remarks on the uniqueness of limit cycles.* Kexue Tongbao, 28 (1983), pp. 452-455. (Cité en page 3.)

[54] **Yu P, Han M.** *Limit cycles in generalized Liénard systems.* Chaos Solitons Fract 2006 ;30 :1048-1068. (Cité en page 4.)

[55] **Zang H, Zhang T, Tian Y. C and Tadé M. O.** *Limit cycles for the Kukles system. J. Dyn. Control Syst.* 14, 283-298 (2008). (Cité en page 5.)

[56] **Zhang Z, Ding T, Huang W, Dong Z.** *Qualitative Theory of Differential Equations.* American Mathematical Society, Providence (1992). (Cité en page 4.)